

# WSモデルおよび修正Configurationモデルで 生成したネットワークのUncorrelated性について

日本大学文理学部情報科学科

谷 聖一研究室

新井 天馬

# 目次

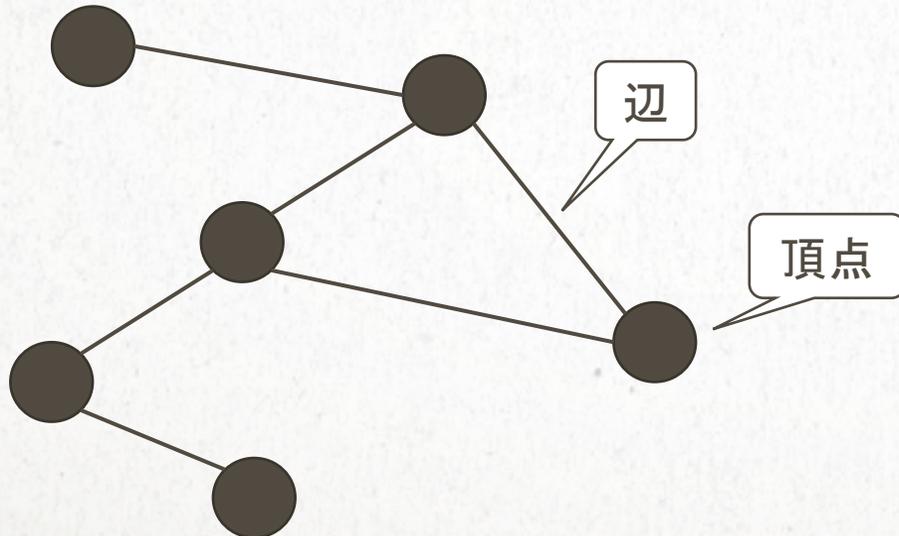
1. はじめに
2. 実験方法
3. 実験結果
4. 考察
5. 今後の課題
6. おわりに

# 1. はじめに

## 1.1 複雑ネットワーク (1)

### ネットワークとは

→ 頂点と辺から構成され，繋がりや関係を表したものの



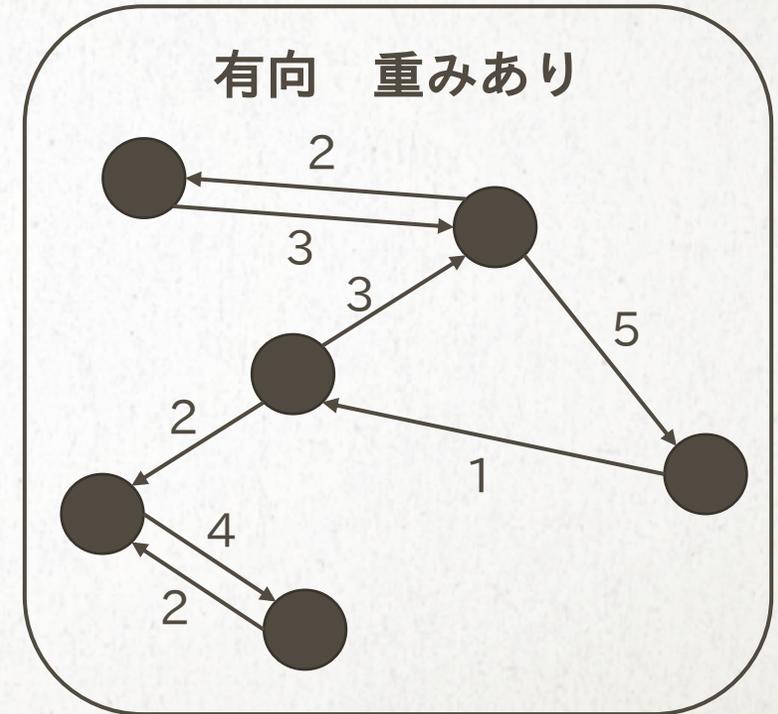
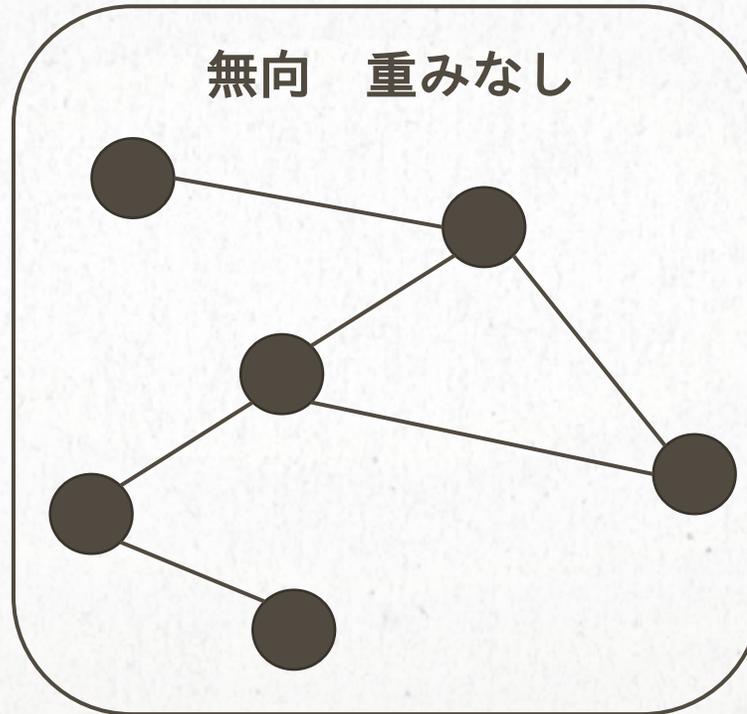
ネットワーク  
||  
学部2年前期の  
グラフ理論でのグラフ

# 1. はじめに

## 1.1 複雑ネットワーク (2)

### ネットワークの表現方法

	無向	有向
重みなし	○	
重みあり		

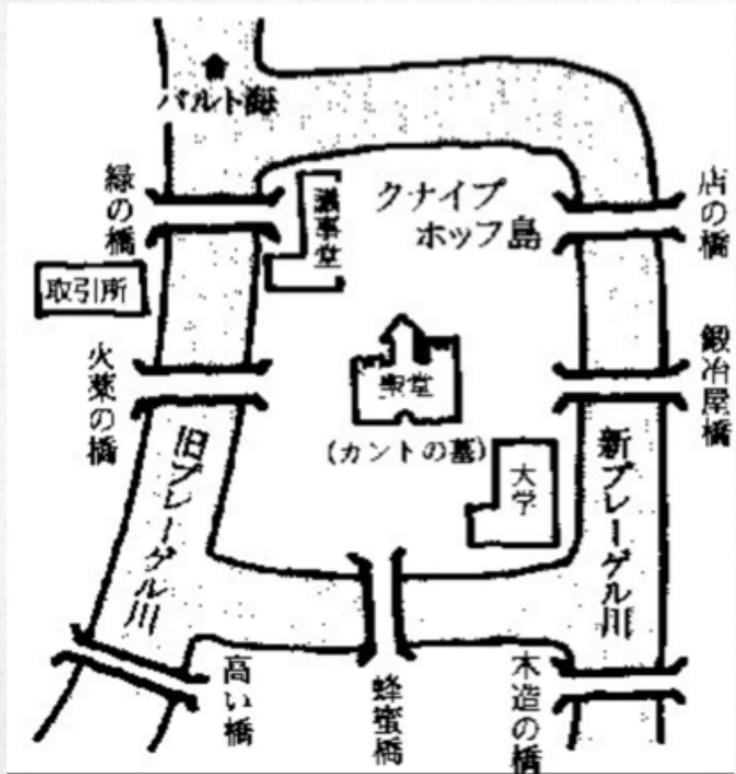


# 1. はじめに

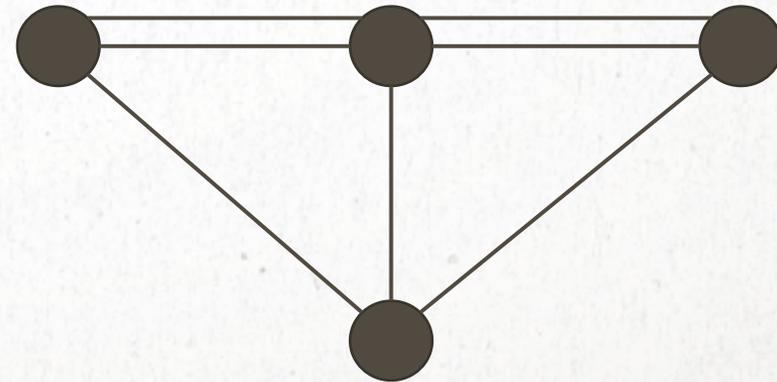
## 1.1 複雑ネットワーク (3)

### ネットワークでモデル化

ケーニヒスベルクの  
一筆書き問題



頂点：川で区切られた陸  
辺：橋



[http://nam-students.blogspot.jp/2016/03/blog-post\\_11.html](http://nam-students.blogspot.jp/2016/03/blog-post_11.html)

# 1. はじめに

## 1.1 複雑ネットワーク (4)

現実世界の現象をネットワークでモデル化したものは、  
非常に複雑なものが多い



### 複雑ネットワークと呼ぶ

例)

ネットワーク	頂点	辺
WWW (World Wide Web)	Webページ	ハイパーリンク
食物網	生物	捕食-被食関係
路線図	駅	線路

# 1. はじめに

## 1.1 複雑ネットワーク (5)

例) twitter上でハッシュタグを利用した情報拡散の様子



頂点：ユーザー

青辺：リツイート

橙辺：リプライ

(Jacob, Ratkiewicz et al. "Detecting and Tracking the Spread of Astroturf Memes in Microblog Streams" World Wide Web. 2011. p.249-252)

# 1. はじめに

## 1.2 ネットワークの数学的な定義

$$G = (V, E)$$

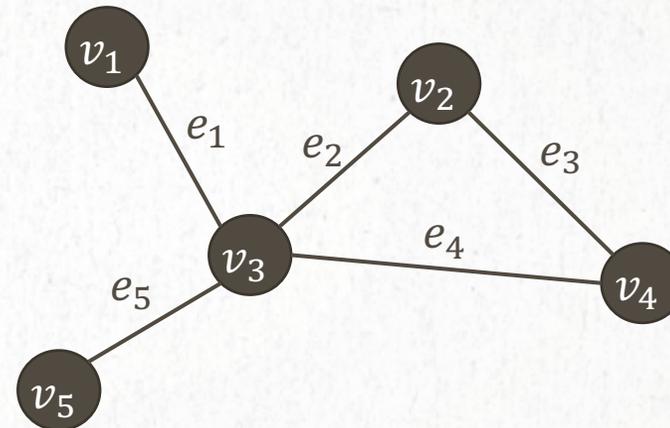
$N$ : 頂点数

$M$ : 辺数

頂点の集合  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$

辺の集合  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$

例)  $N = 5, M = 5$



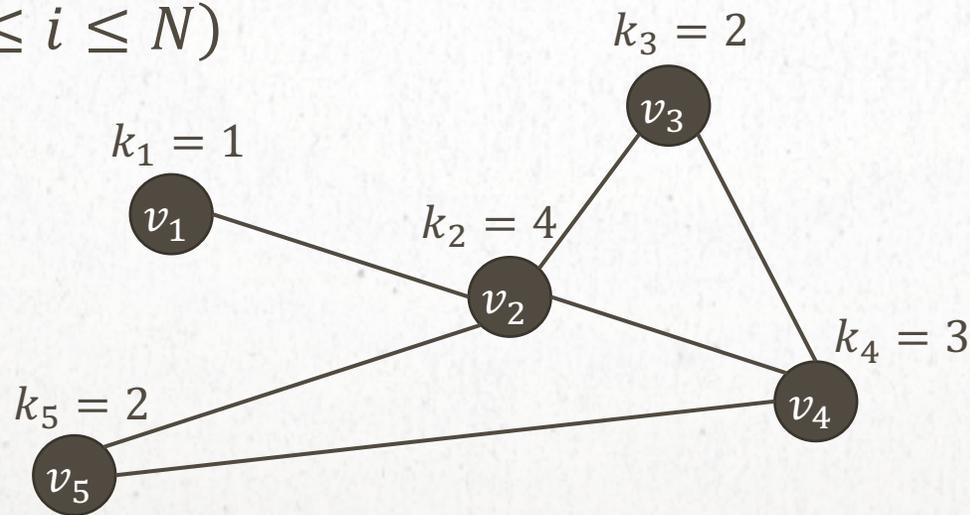
# 1. はじめに

## 1.3 複雑ネットワークの性質 (1)

### ネットワークの頂点の次数

→ 各頂点から出ている辺の数

次数 :  $k_i (1 \leq i \leq N)$



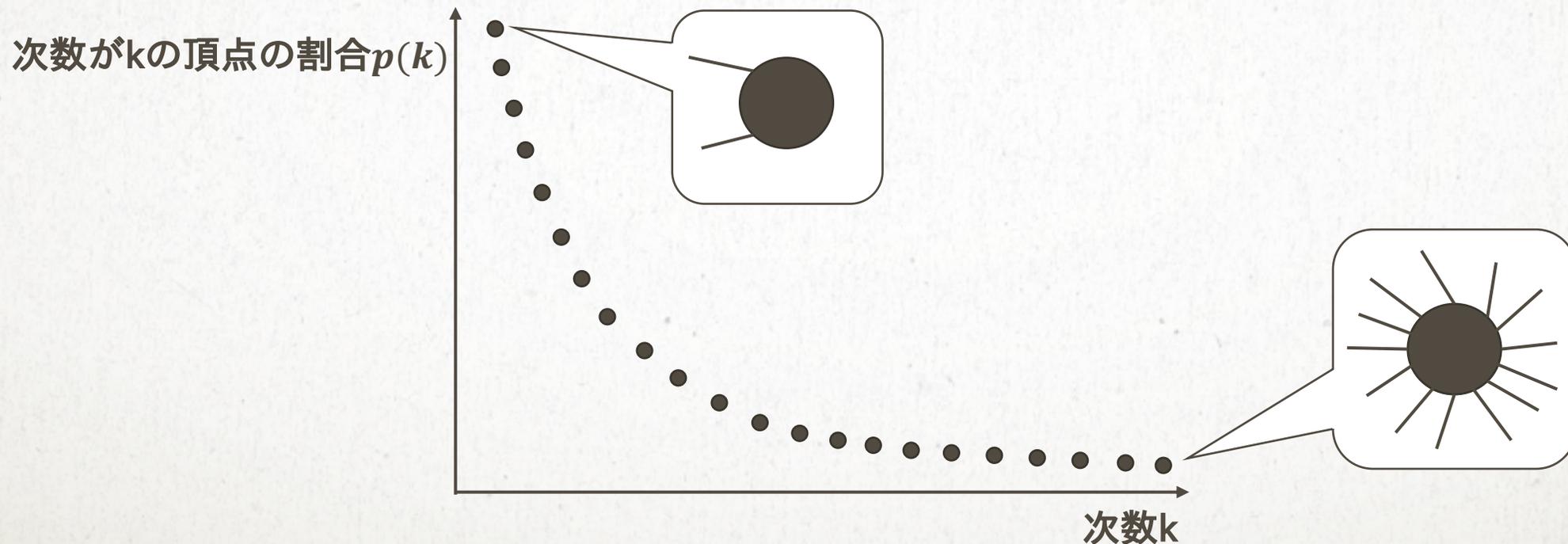
# 1. はじめに

## 1.3 複雑ネットワークの性質 (2)

### スケールフリー性

べき指数 (一般に  $2 < \gamma < 3$ )

→ 次数分布  $p(k)$  が,  $p(k) \propto k^{-\gamma}$  (べき則) に従うこと



# 1. はじめに

## 1.3 複雑ネットワークの性質 (3)

### スケール変換不変性

$$p(k) \propto k^{-\gamma} \longrightarrow p(k) = ck^{-\gamma} (c : \text{比例定数})$$

$a$ を定数としてスケール変換

$$p(ak) = c(ak)^{-\gamma} = a^{-\gamma}p(k)$$

どの縮尺（スケール）で  
拡大/縮小してもべき則は保たれる

$p(ak)$ は、 $p(k)$ の  
定数倍

# 1. はじめに

## 1.3 複雑ネットワークの性質 (4)

$$p(k) = ck^{-\gamma}$$

↓ 両対数をとる

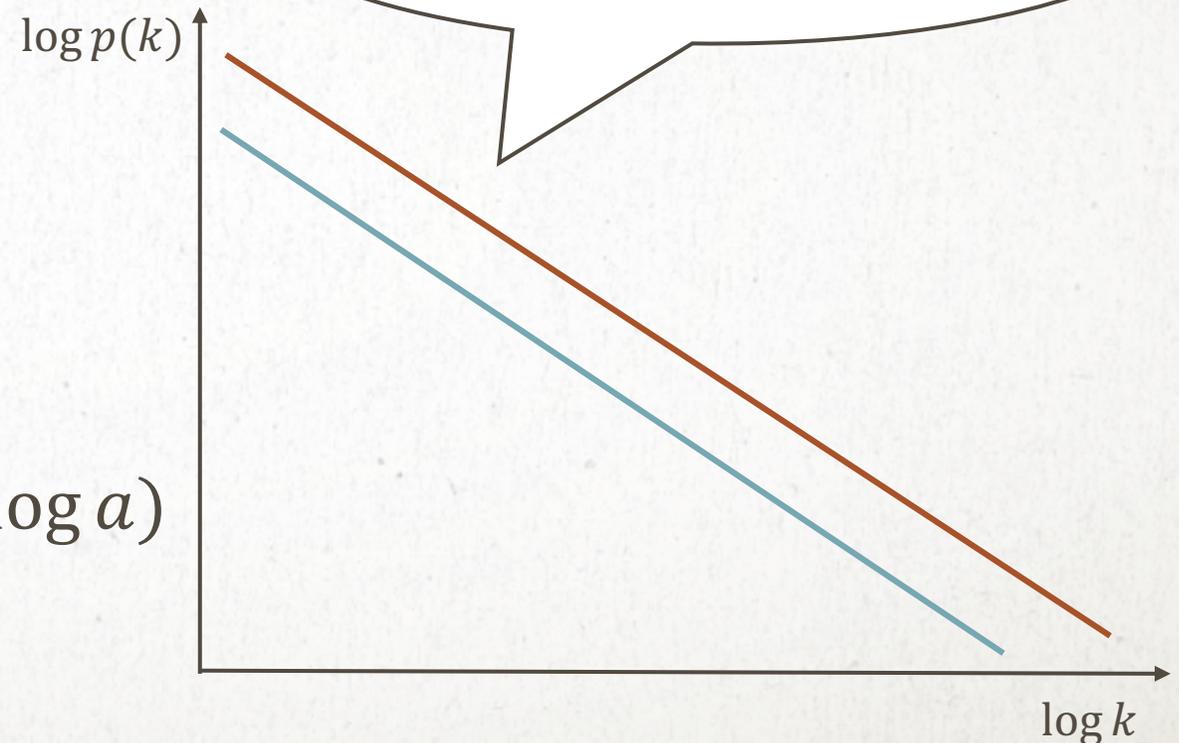
$$\log p(k) = -\gamma \log k + \log c$$

→ 傾き  $-\gamma$ , 切片  $\log c$

同様に,  $p(ak)$ は

$$\log p(ak) = -\gamma \log k + (\log c - \gamma \log a)$$

→ 傾き  $-\gamma$ , 切片  $(\log c - \gamma \log a)$



# 1. はじめに

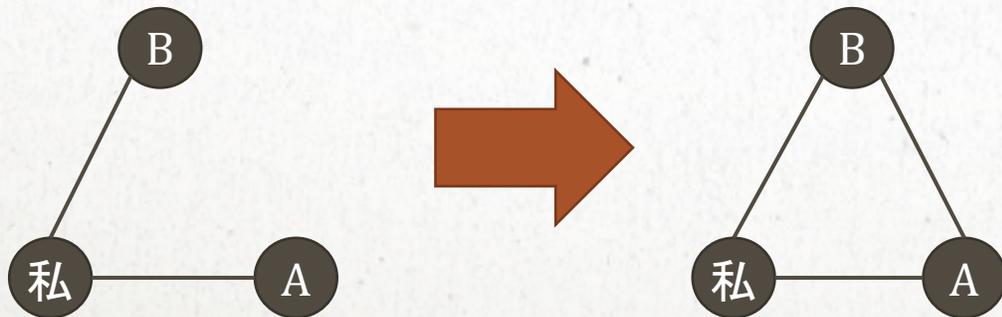
## 1.3 複雑ネットワークの性質 (5)

### スモールワールド性

→ 平均距離 **小** クラスタ係数 **大**

→ 一般に「**世間は狭い**」と呼ばれる現象と関係がある

例) 友達の友達は友達

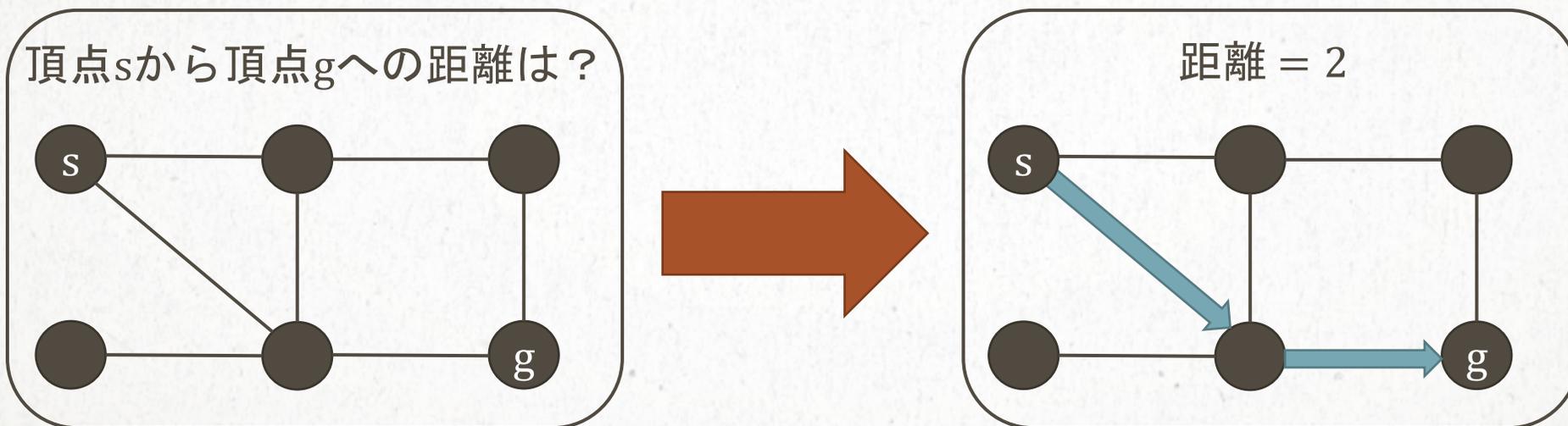


# 1.はじめに

## 1.4 ネットワークの特徴量 (1)

### 平均距離

- 距離：2頂点間の最短経路で通る辺の数



- 平均：全2頂点对

# 1. はじめに

## 1.4 ネットワークの特徴量 (2)

### 平均距離

$d(v_i, v_j)$  : 2頂点 $v_i$ と $v_j$ の距離

平均距離の定義 :

$$L = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq N} d(v_i, v_j)$$

N頂点から2頂点を選ぶ  
組み合わせ数

$${}_N C_2 = \frac{N(N-1)}{2}$$

で割る

# 1. はじめに

## 1.4 ネットワークの特徴量 (3)

### クラスター係数

頂点 $v_i (1 \leq i \leq N)$ のクラスター係数の定義：

$$C_i \equiv \frac{t_i}{k_i(k_i - 1)/2}$$

$k_i$  : 次数

$t_i$  :  $v_i$ と繋がっている2頂点が  
繋がっている数

ネットワーク全体のクラスター係数は、 $C_i (1 \leq i \leq N)$  の平均

# 1. はじめに

## 1.4 ネットワークの特徴量 (4)

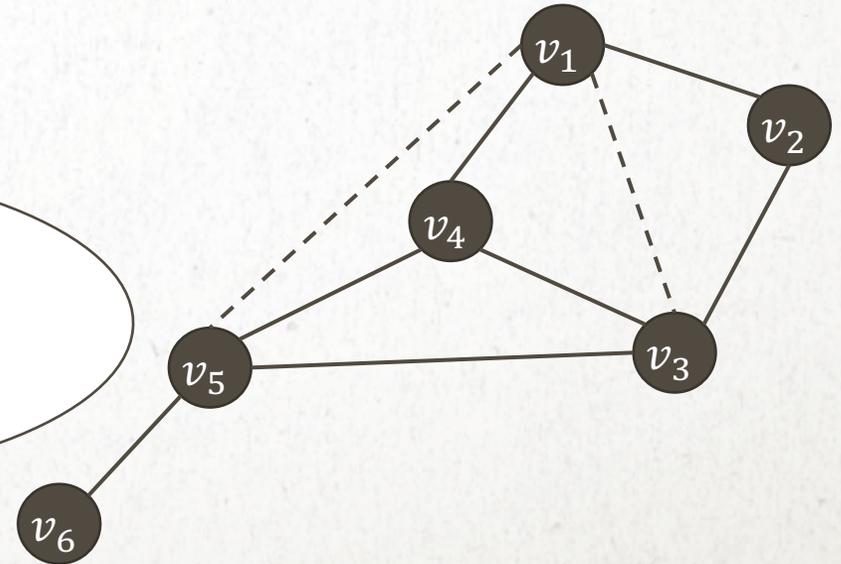
$k_i$  : 次数  
 $t_i$  :  $v_i$ と繋がっている2頂点が繋がっている数

各頂点のクラスター係数の定義 :  $C_i \equiv \frac{t_i}{k_i(k_i - 1)/2}$   
注意) 定義から, 次数が1の頂点は考えない

例)  $v_4$ のクラスター係数 ( $k_4 = 3$ )

$$C_4 = \frac{1}{3(3 - 1)/2} = \frac{1}{3}$$

$v_4$ と隣接している頂点の中から2つを選ぶ組み合わせ数



# 1. はじめに

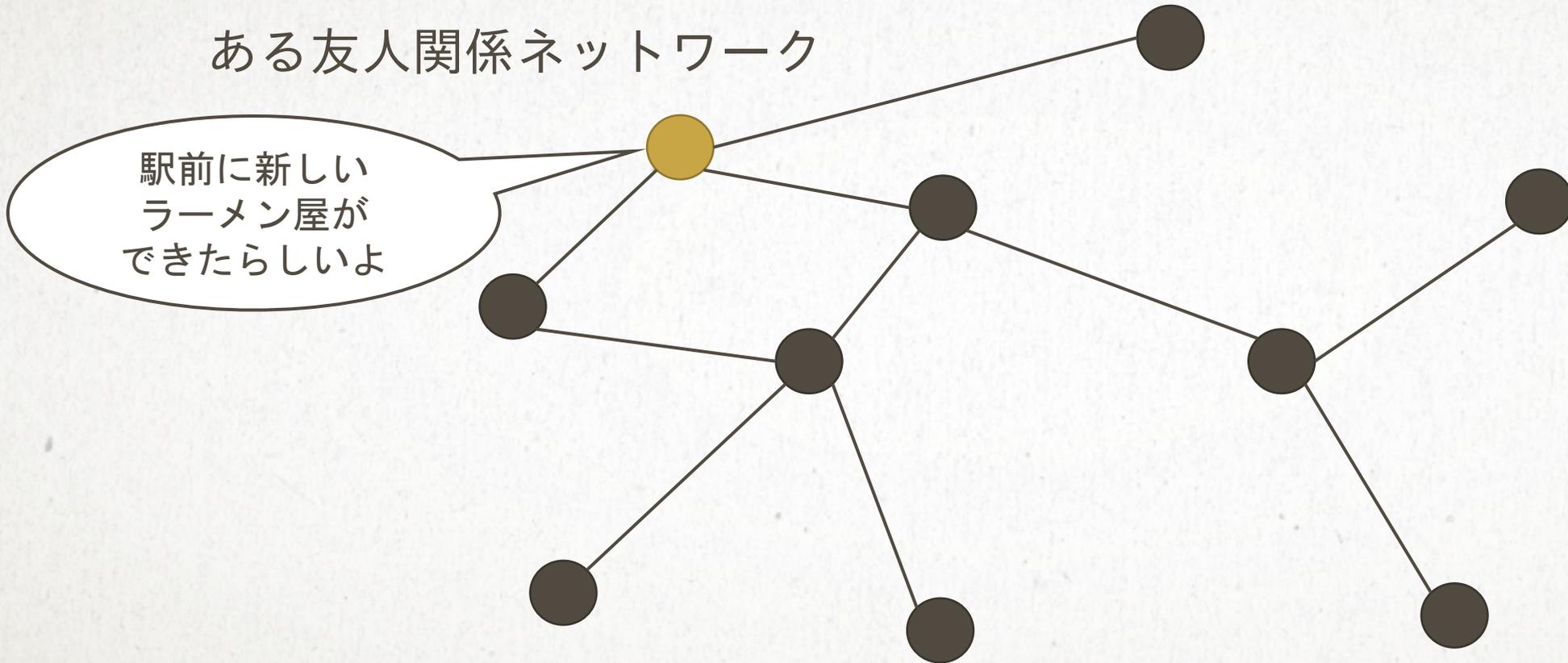
## 1.5 演習の背景 (1)

本演習で扱っている問題

# 1. はじめに

## 1.5 演習の背景 (2)

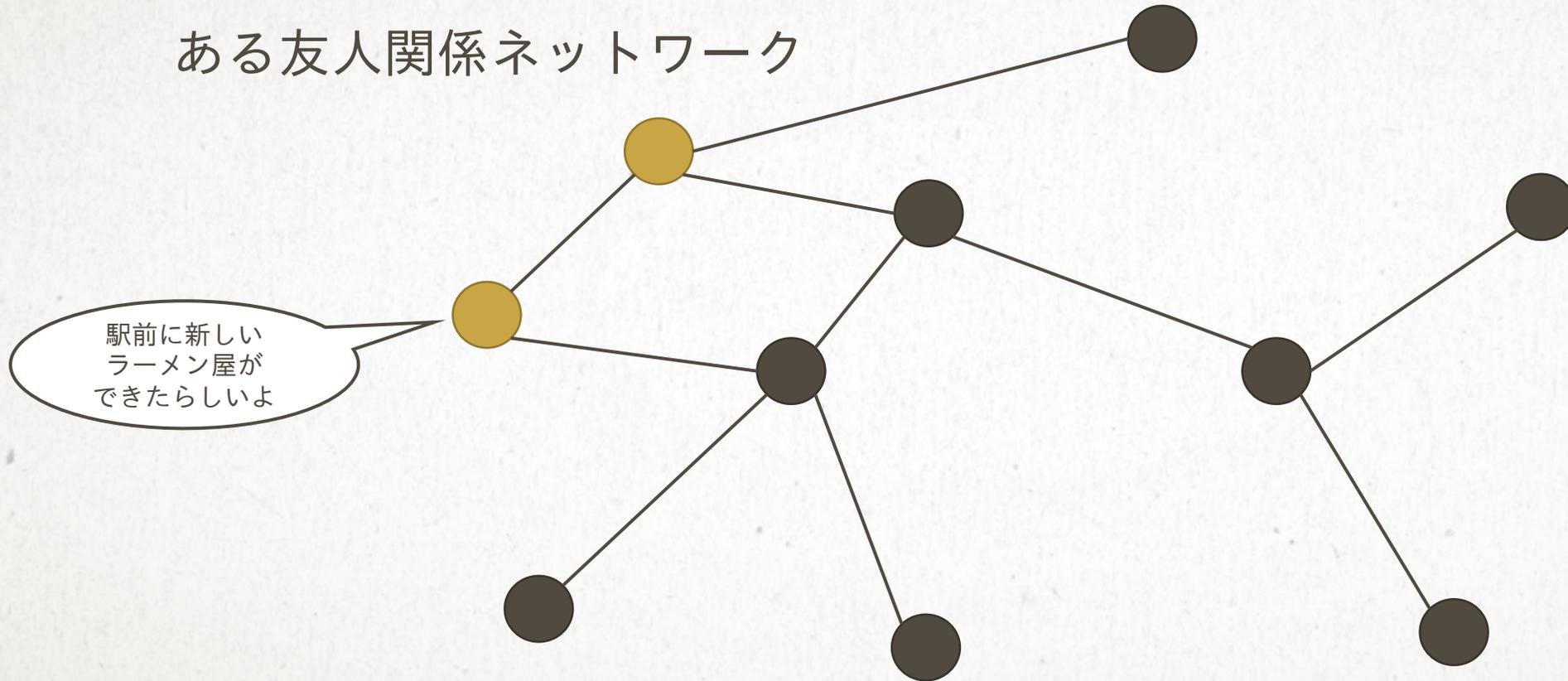
ある友人関係ネットワーク



# 1. はじめに

## 1.5 演習の背景 (3)

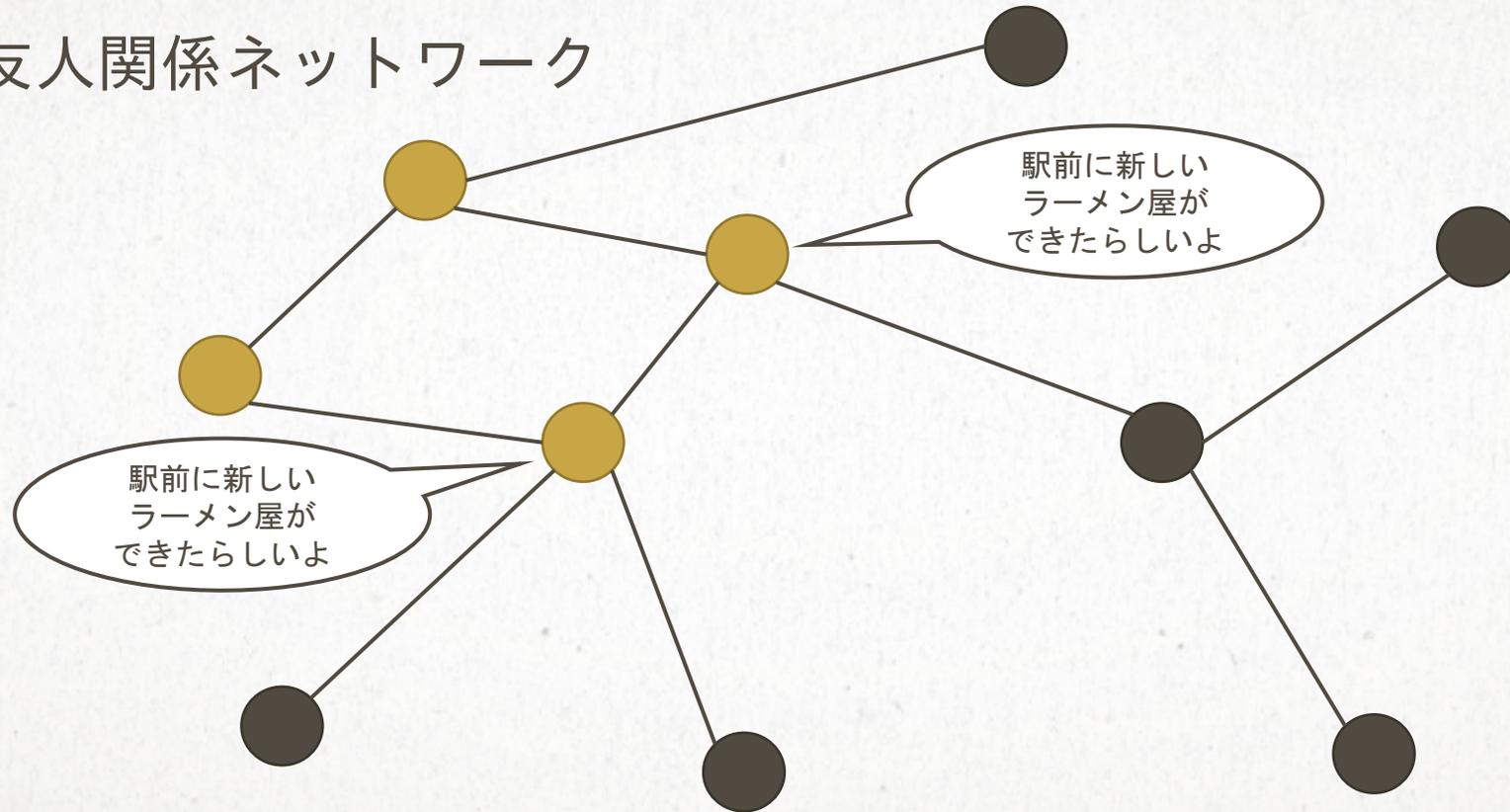
ある友人関係ネットワーク



# 1. はじめに

## 1.5 演習の背景 (4)

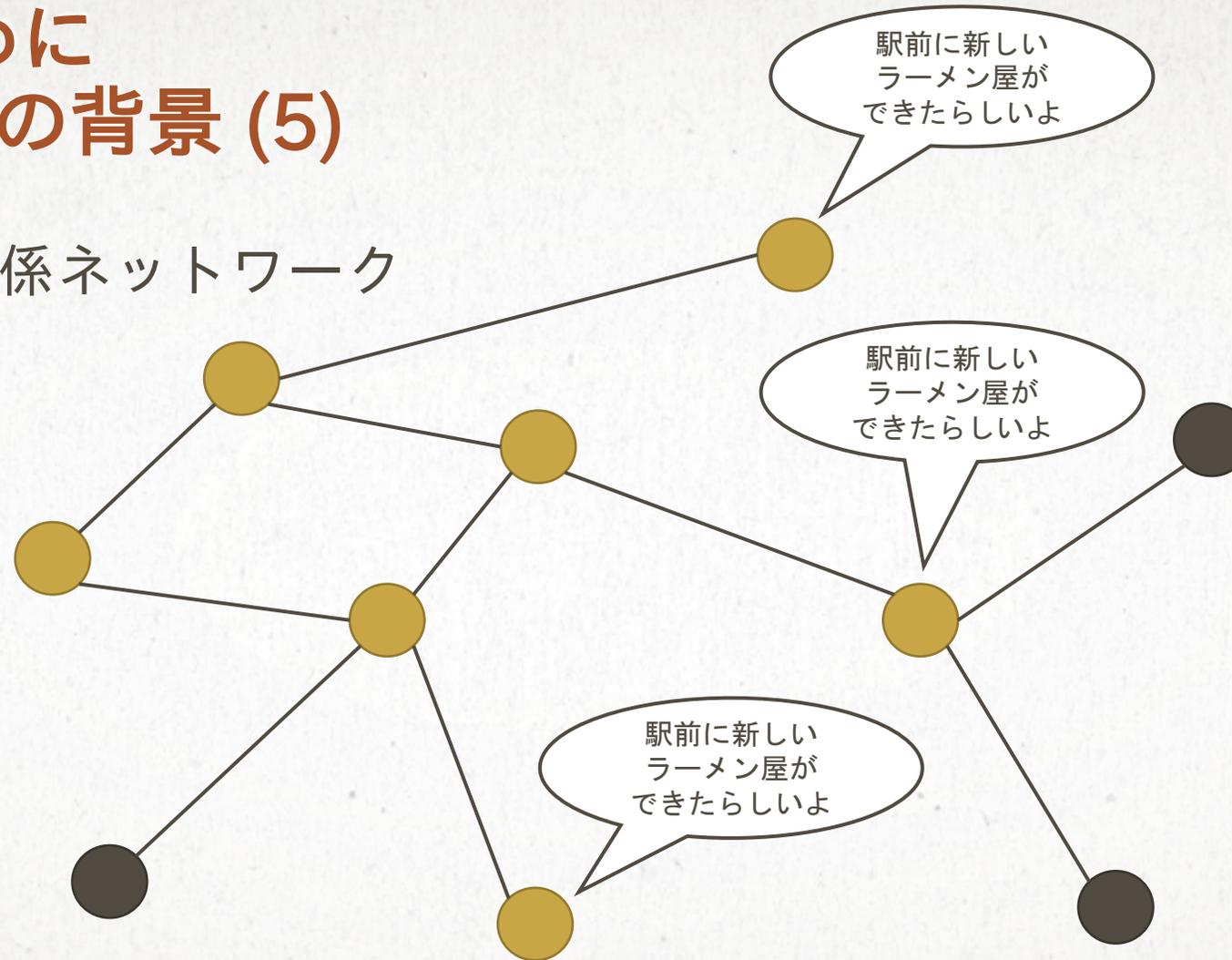
ある友人関係ネットワーク



# 1. はじめに

## 1.5 演習の背景 (5)

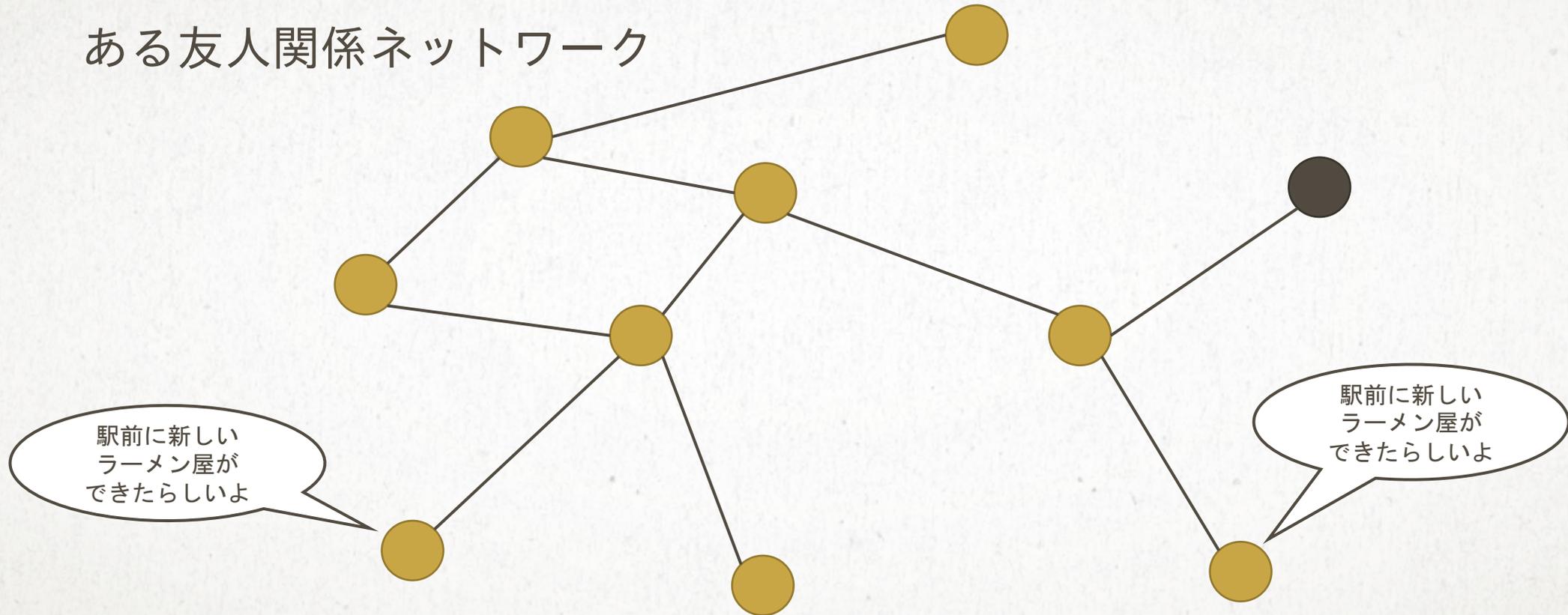
ある友人関係ネットワーク



# 1. はじめに

## 1.5 演習の背景 (6)

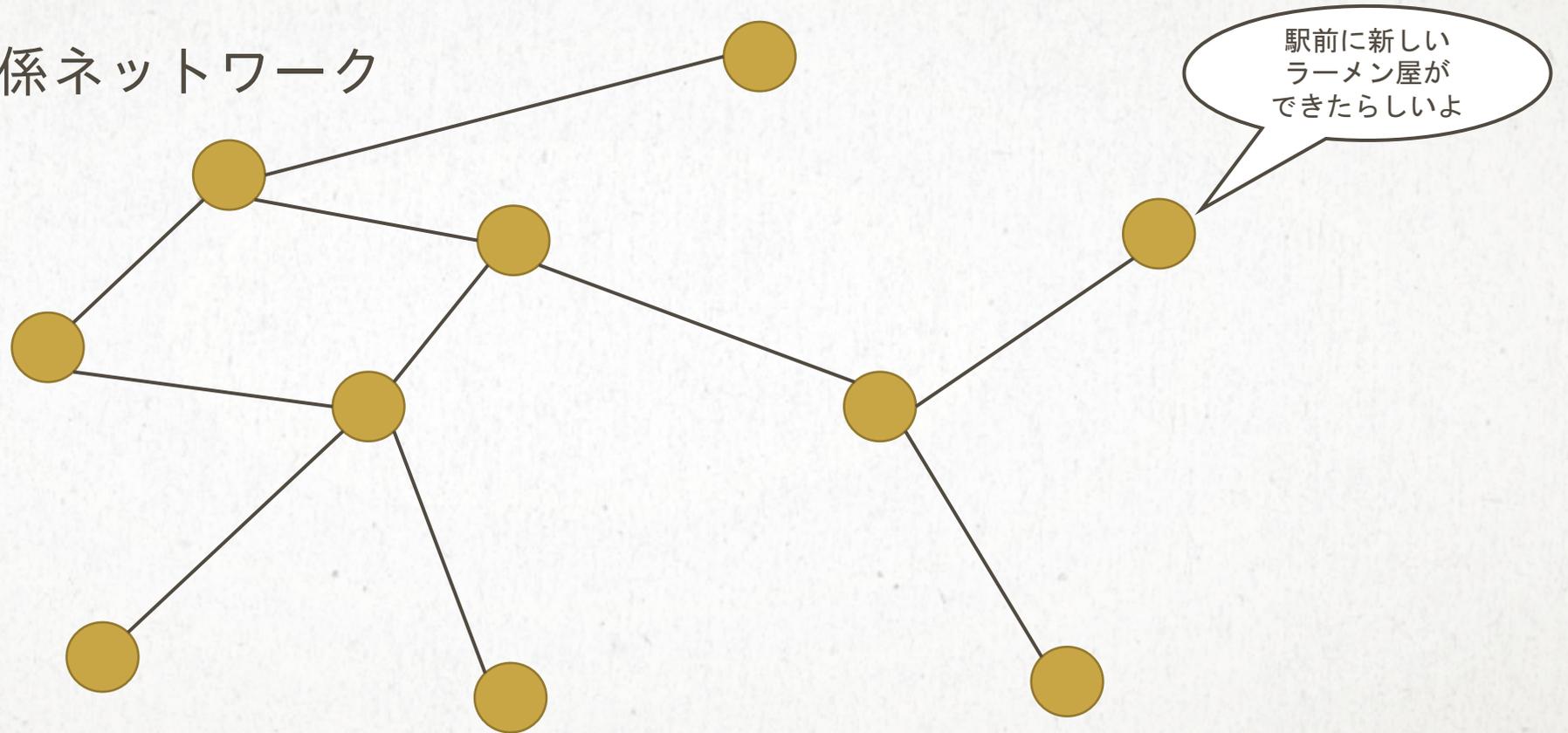
ある友人関係ネットワーク



# 1. はじめに

## 1.5 演習の背景 (7)

ある友人関係ネットワーク



# 1. はじめに

## 1.5 演習の背景 (8)

ある人

どのように情報を流せば、  
素早く全体に情報を  
届けられるのか？

# 1. はじめに

## 1.5 演習の背景 (9)

ネットワーク上での情報伝播に関する定理

[TTMO]

Hiroshi Toyoizumi, Seiichi Tani, Naoto Miyoshi, Yoshio Okamoto, Reverse preferential spread in complex networks. Phys. Rev. E 86, 021103 (2012)

伝播速度を限定した**伝播モデル**でネットワークに情報を流すとき、ネットワークが**ある性質**を持つなら、**次数の小さい頂点に優先的に**流す方法が最速である

# 1. はじめに

## 1.6 伝播モデル (1)

伝播モデル



伝播のルール

+

伝播先を決めるために使える情報のルール

# 1. はじめに

## 1.6 伝播モデル (2)

### 伝播のルール

1. 初期状態でのソースノードは1つ
2. ソースノードは、隣接頂点のうち**1つ**をターゲットノードに選択
3. ターゲットノードはソースノードになる
4. 全ての頂点がソースノードとなるまで2~3を繰り返す

ソースノード：情報を保持している頂点

ターゲットノード：ソースノードから伝播先として選択された頂点

# 1. はじめに

## 1.6 伝播モデル (3)

### 伝播先を決めるために使える情報のルール

- 各頂点が事前に保持している情報は，隣接頂点の次数のみ
- 各頂点は，ネットワーク全体の構造は分からない

# 1. はじめに

## 1.6 伝播モデル (4)

### ターゲットノードの選択方法

1. 一様分布に従い乱択
2. 次数の大きい頂点を優先的に乱択
3. 次数の小さい頂点を優先的に乱択

注意) ソースノードが使える情報は、隣接頂点の次数のみ

# 1. はじめに

## 1.5 演習の背景（再掲）

ネットワーク上での情報伝播に関する定理

[TTMO]

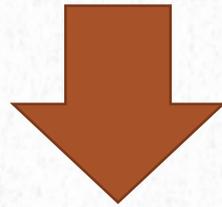
Hiroshi Toyoizumi, Seiichi Tani, Naoto Miyoshi, Yoshio Okamoto, Reverse preferential spread in complex networks. Phys. Rev. E 86, 021103 (2012)

伝播速度を限定した**伝播モデル**でネットワークに情報を流すとき、ネットワークが**ある性質**を持つなら、**次数の小さい頂点に優先的に**流す方法が最速である

1. はじめに

## 1.7 Uncorrelated性 (1)

ある性質



Uncorrelated性

# 1. はじめに

## 1.7 Uncorrelated性 (2)

**Uncorrelated性**とは,  
ネットワークにおける様々な研究でよく仮定される性質の1つ

uncorrelated : 無相関の



局所性がなく, どこも同じような構造をしている

# 1. はじめに

## 1.8 演習の目的 (1)

個々のネットワークが  
どの程度**Uncorrelated性**を持つかどうかの判定方法は未確立



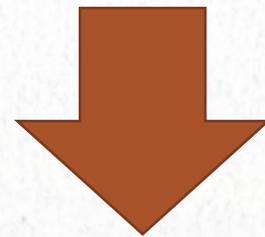
**Uncorrelated性**と関係のあるネットワーク特徴量を見つけない

# 1. はじめに

## 1.8 演習の目的 (2)

### 本演習の背景となった定理

ネットワークが**Uncorrelated性を持つ**なら、  
次数の小さい頂点に優先的に流す方法が**最速である**



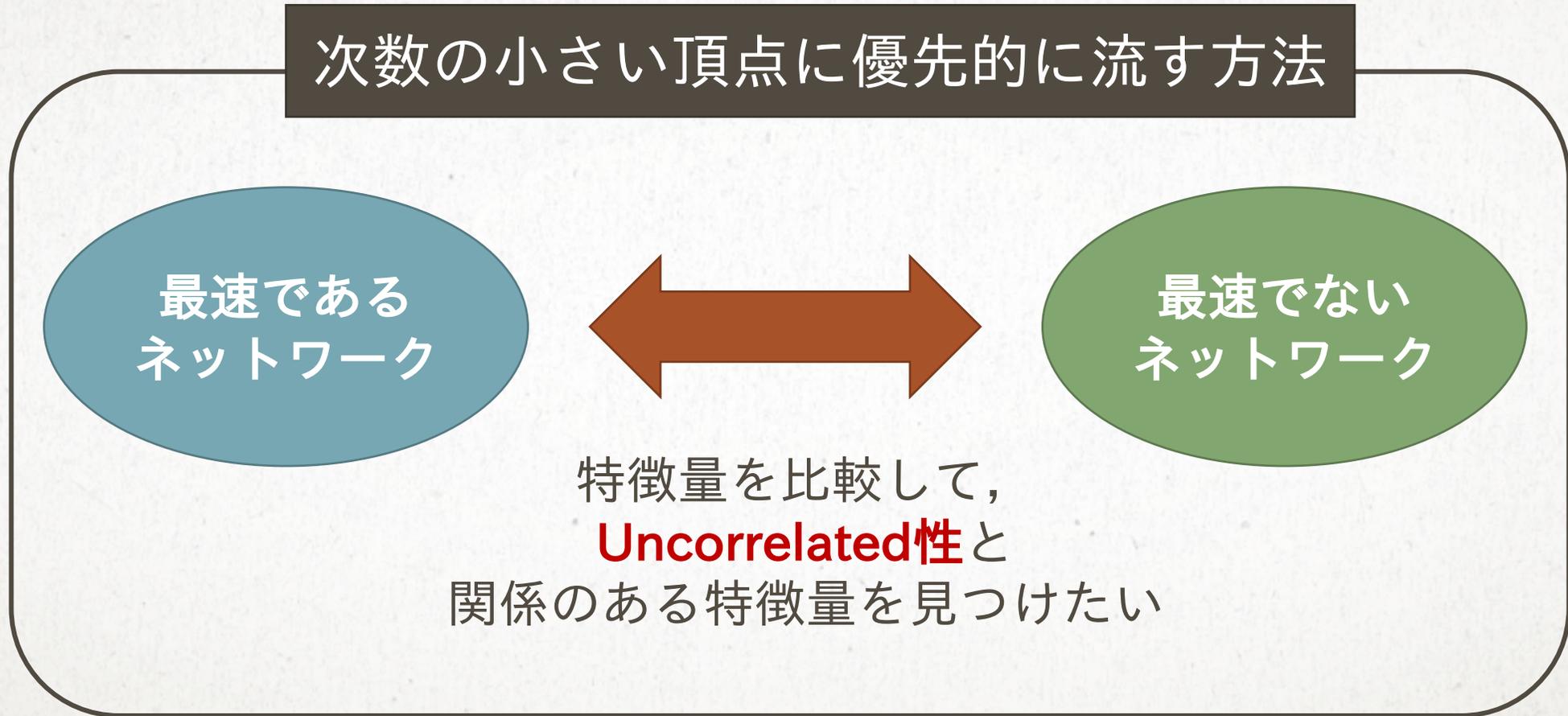
対偶は真

逆, 裏は  
真とは限らない

次数の小さい頂点に優先的に流す方法が**最速でない**なら、  
ネットワークは**Uncorrelated性を持たない**

# 1. はじめに

## 1.8 演習の目的 (3)



# 1. はじめに

## 1.8 演習の目的 (4)

- : 過去の卒業演習で使用  
● : 本演習で使用

ネットワーク生成モデル	掲載誌	発表年	著者	特徴
WSモデル ○ ●	Nature	1998年	D.J.Watts S.H.Strogatz	<ul style="list-style-type: none"><li>スモールワールド性を持つ</li><li>スケールフリー性は持たない</li></ul>
BAモデル ● ○	Science	1999年	A.L.Barabasi R.Albert	<ul style="list-style-type: none"><li>成長するネットワーク</li><li>スケールフリー性を持つ</li></ul>
Configurationモデル ● ○	Physical Review	2001年	M.E.J.Newman D.J.Watts S.H.Strogatz	<ul style="list-style-type: none"><li>成長しないネットワーク</li><li>次数分布を任意に作れる</li></ul>
修正Configurationモデル ● ●	Physical Review	2004年	M.Catanzaro M.Boguna R.Pastor-Satorras	<ul style="list-style-type: none"><li>Uncorrelated性を持つとされるヒューリスティック</li></ul>

# 1. はじめに

## 1.8 演習の目的 (5)

過去の卒業演習では、  
以下の3つのネットワーク生成モデルを用いて情報伝播実験を行い、  
ネットワークがどの程度 **Uncorrelated性** を持つかを調査

BAモデル  
Configurationモデル  
修正Configurationモデル

全て  
スケールフリーネットワーク

# 1. はじめに

## 1.8 演習の目的 (6)

延  
情  
どの

スケールフリー性を持たない  
スモールワールドネットワークは、  
どの程度Uncorrelated性を  
持つのか？

Configur  
修正Configu

# 1. はじめに

## 1.8 演習の目的 (7)

本演習では、  
以下のネットワーク生成モデルを用いて情報伝播実験を行う

### 1. WSモデル

平均距離 小 クラスタ係数 大  
スモールワールドネットワーク

### 2. 修正Configurationモデル

**Uncorrelated性**を持つネットワークを生成できるとされる  
ヒューリスティック

## 2. 実験方法

### 2.1 WSモデル (1)

#### WSモデルの作り方

1. 頂点数 $N$ と平均次数 $\langle k \rangle$  (偶数) を決定
2. 拡張サイクルを作成
3. 全ての辺から確率 $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ) で辺を選択
4. 選んだ各辺について, 端点のどちらかから切り離す  
(切り離す端点は, 半々の確率で決定)
5. 切り離した各辺の新しい端点を全頂点の中から等確率で選び, 繋げる

## 2. 実験方法

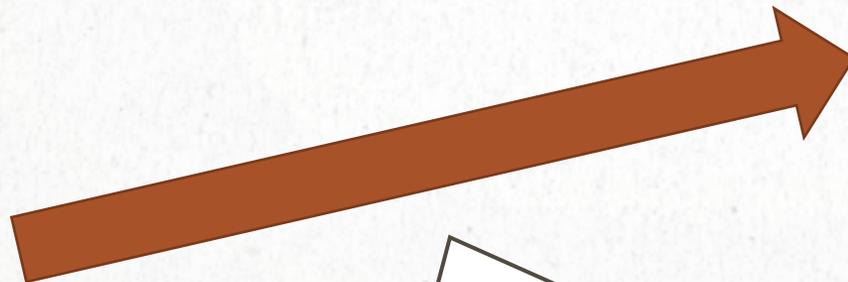
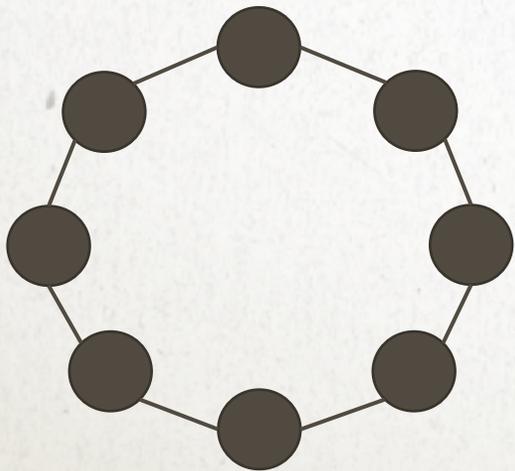
### 2.1 WSモデル (2)

1. 頂点数 $N$ と平均次数 $\langle k \rangle$  (偶数) を決定

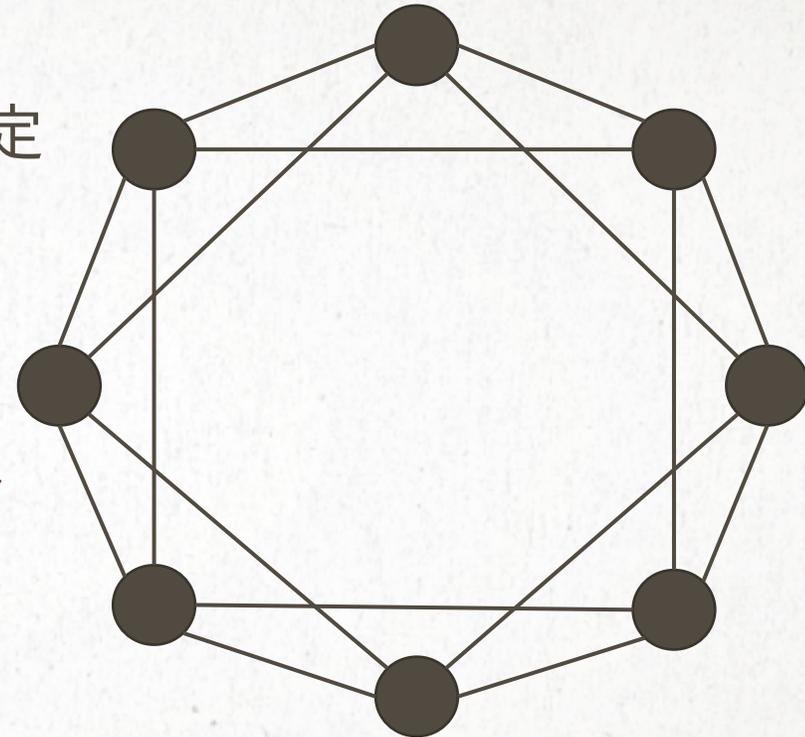
→  $N = 8$ ,  $\langle k \rangle = 4$

2. 拡張サイクルを作成

サイクル



拡張サイクル



$\langle k \rangle / 2$ 個分隣の頂点にも  
辺を張る

## 2. 実験方法

### 2.1 WSモデル (3)

3. 全ての辺から確率 $p(0 \leq p \leq 1)$ で

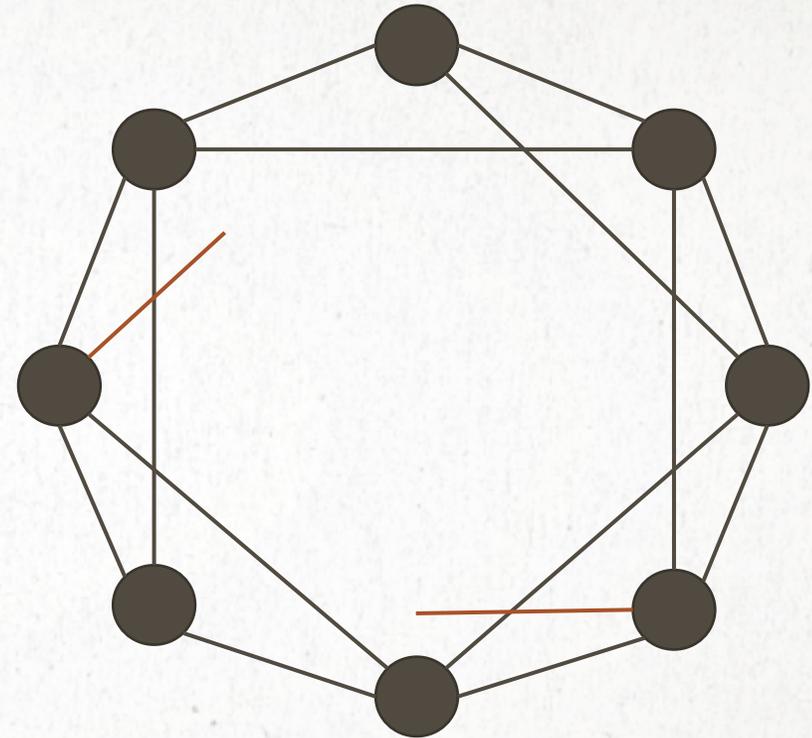
辺を選択

→  $p = 0.125$

4. 選んだ各辺について、端点のどちら

かから切り離す

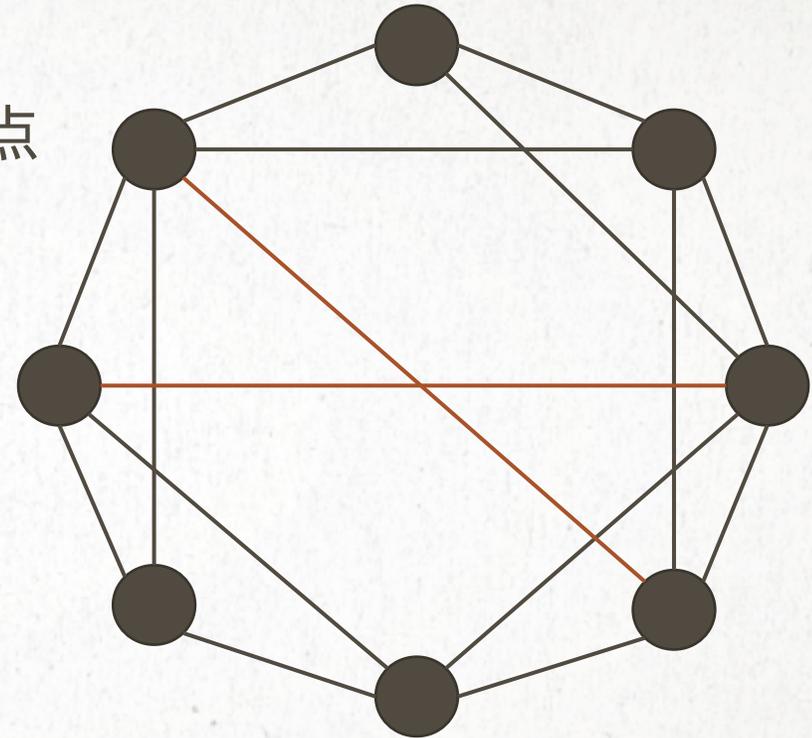
(切り離す端点は、半々の確率で決定)



## 2. 実験方法

### 2.1 WSモデル (4)

5. 切り離した各辺の新しい端点を全頂点の中から等確率で選び、繋げる



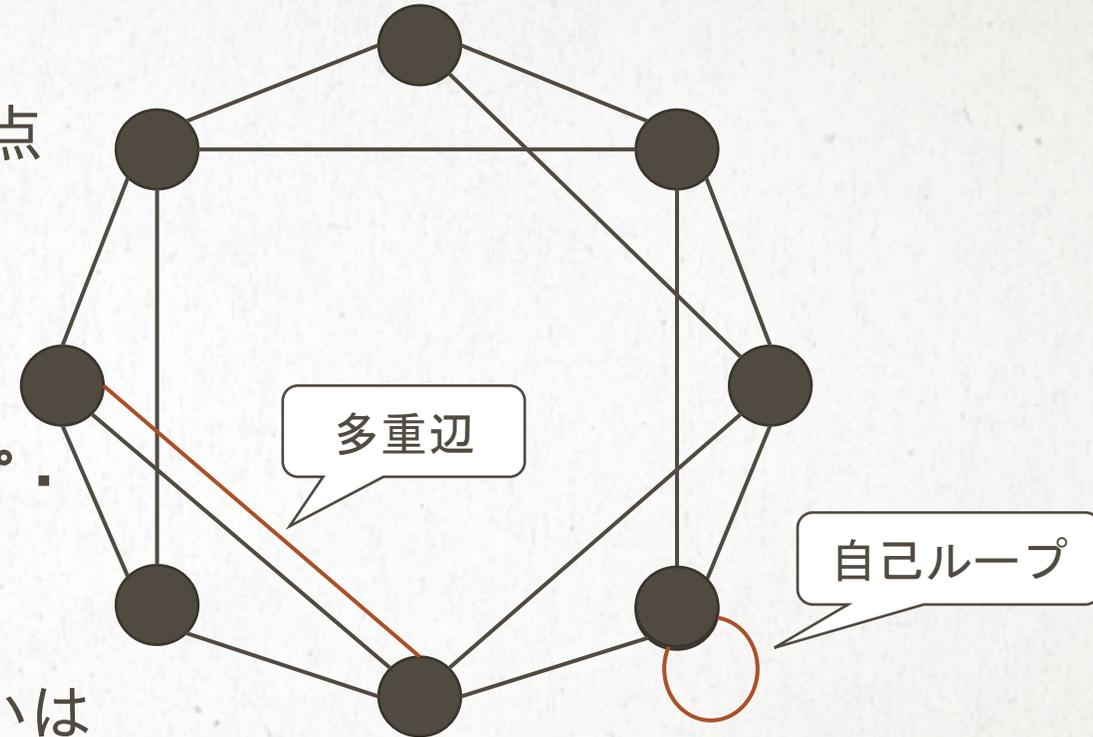
## 2. 実験方法

### 2.1 WSモデル (5)

5. 切り離した各辺の新しい端点を全頂点の中から等確率で選び、繋げる

注意) 全頂点から選ぶので、**自己ループ**・**多重辺**ができてしまう可能性がある

→ **自己ループ**・**多重辺**を許す・許さないはどちらも生成



## 2. 実験方法

### 2.1 WSモデル (6)

#### WSモデルの平均距離・クラスター係数

拡張サイクルの時点では、平均距離 **大** クラスター係数 **大**

少数の辺を繋ぎかえる（繋ぎかえた辺：**ショートカット**）

**ショートカット**によって平均距離 **小** クラスター係数 **大**  
（スモールワールドネットワーク）

## 2. 実験方法

### 2.1 WSモデル (7)

#### WSモデルの次数分布

拡張サイクルの時点で全頂点の次数は一定

→ 少数の辺を繋ぎかえると多少のばらつきは出るが、**べき則には従わない**



スケールフリー性は持たない

## 2. 実験方法

### 2.2 Configurationモデル (1)

#### Configurationモデルの作り方

1. 頂点数 $N$ を決定
2. 任意の次数分布 $\{p(0), p(1), \dots, p(N-1)\}$ を決定. **べき則**に従わせると**スケールフリーネットワーク**になる. 最大次数は $k_{max} \leq N-1$ とする
3. 各頂点について, 次数分布に従って次数 $k_i$ を決定 (次数列)
4. 各頂点を適当に配置し,  $k_i$ 個の辺の片割れを持たせる
5. 辺の片割れを2つずつ繋いでいく

## 2. 実験方法

### 2.2 Configurationモデル (2)

1. 頂点数 $N$ を決定

→  $N = 8$

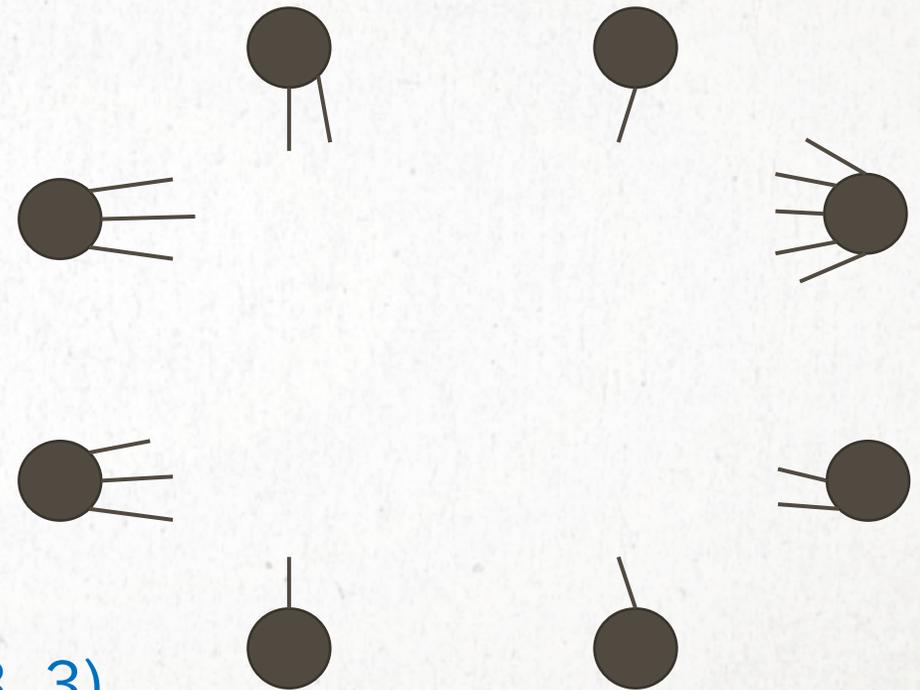
2. 次数分布は以下

$k$	1	2	3	4	5	6	7
$p(k)$	0.4	0.3	0.2	0	0.1	0	0

3. 各頂点について、次数分布に

従って次数 $k_i$ を決定(2, 1, 5, 2, 1, 1, 3, 3)

4. 各頂点を適当に配置し、 $k_i$ 個の辺の片割れを持たせる

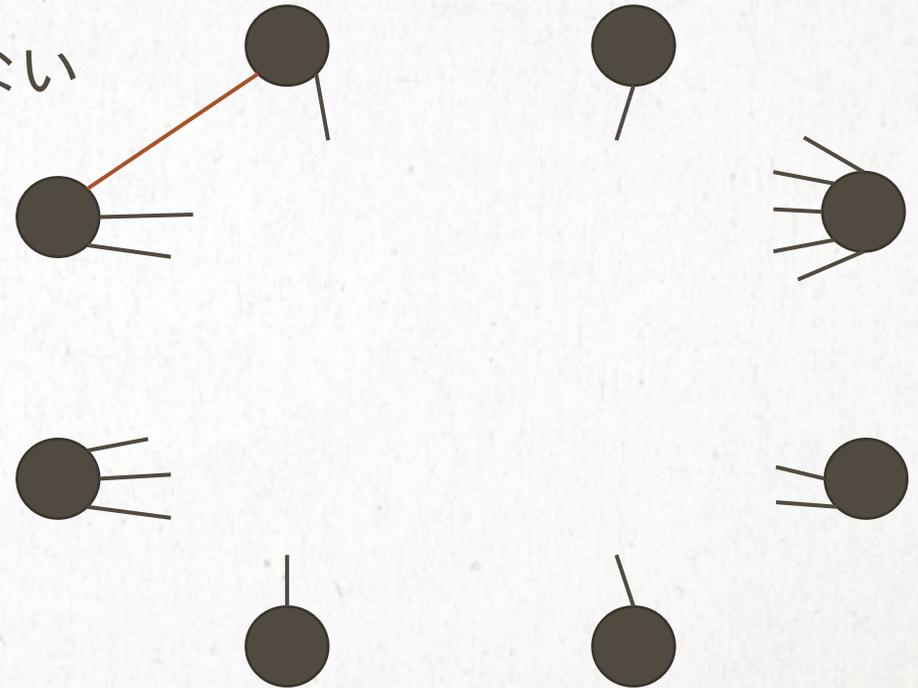


## 2. 実験方法

### 2.2 Configurationモデル (3)

#### 5. 辺の片割れを2つずつ繋いでいく

(自己ループ・多重辺を許す・許さない  
はどちらも生成)

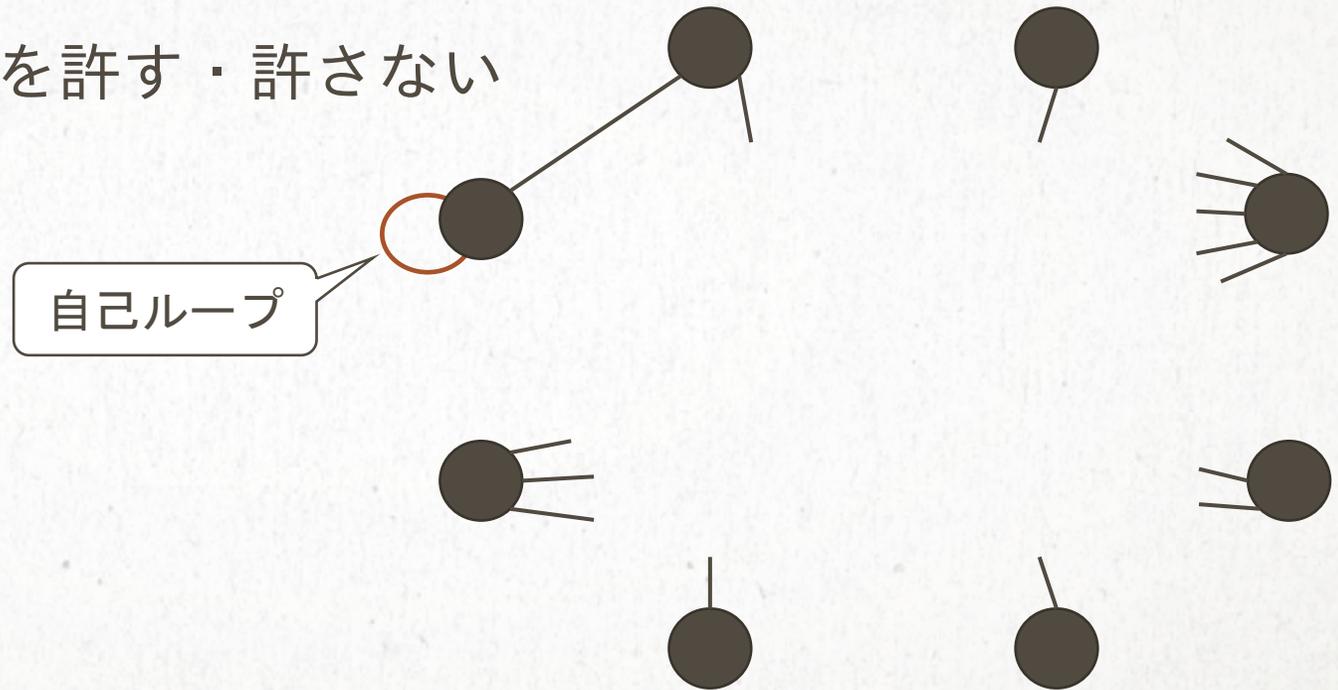


## 2. 実験方法

### 2.2 Configurationモデル (4)

#### 5. 辺の片割れを2つずつ繋いでいく

(自己ループ・多重辺を許す・許さない  
はどちらも生成)

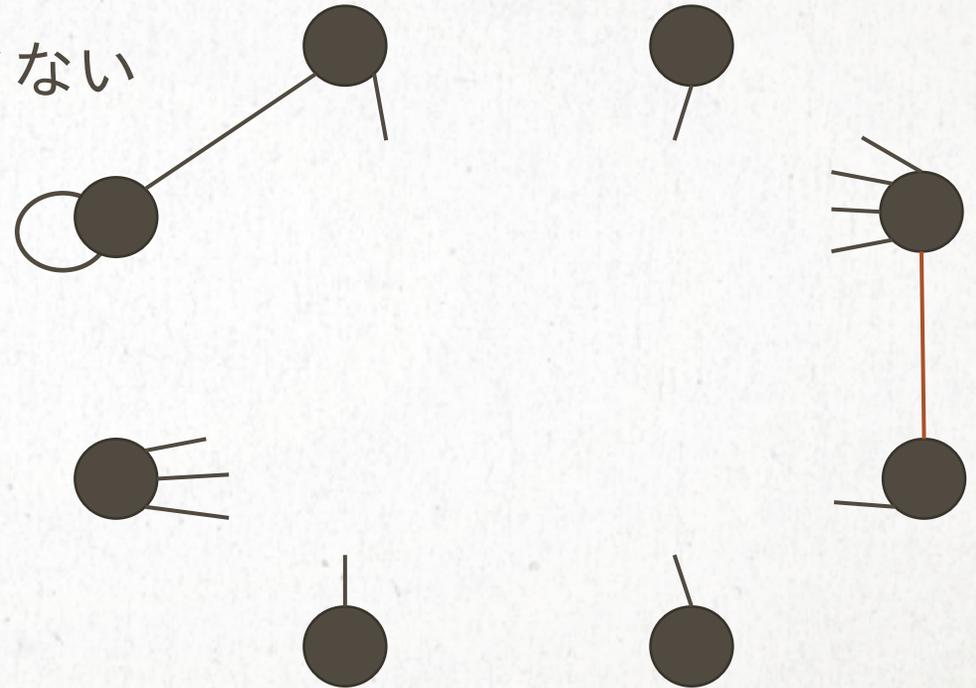


## 2. 実験方法

### 2.2 Configurationモデル (5)

#### 5. 辺の片割れを2つずつ繋いでいく

(自己ループ・多重辺を許す・許さない  
はどちらも生成)

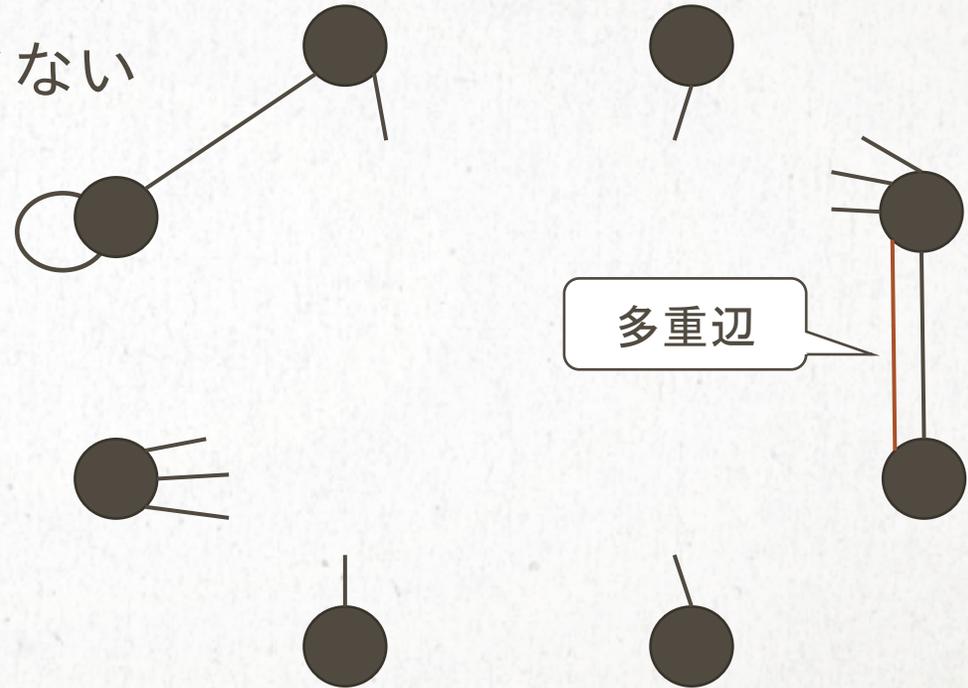


## 2. 実験方法

### 2.2 Configurationモデル (6)

#### 5. 辺の片割れを2つずつ繋いでいく

(自己ループ・多重辺を許す・許さない  
はどちらも生成)

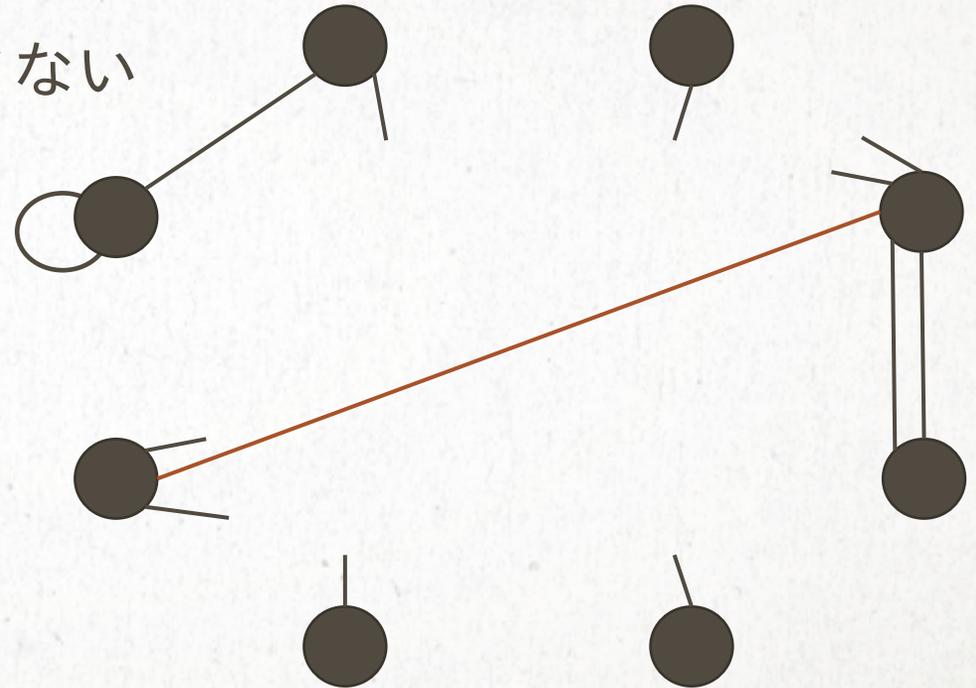


## 2. 実験方法

### 2.2 Configurationモデル (7)

5. 辺の片割れを2つずつ繋いでいく

(自己ループ・多重辺を許す・許さない  
はどちらも生成)



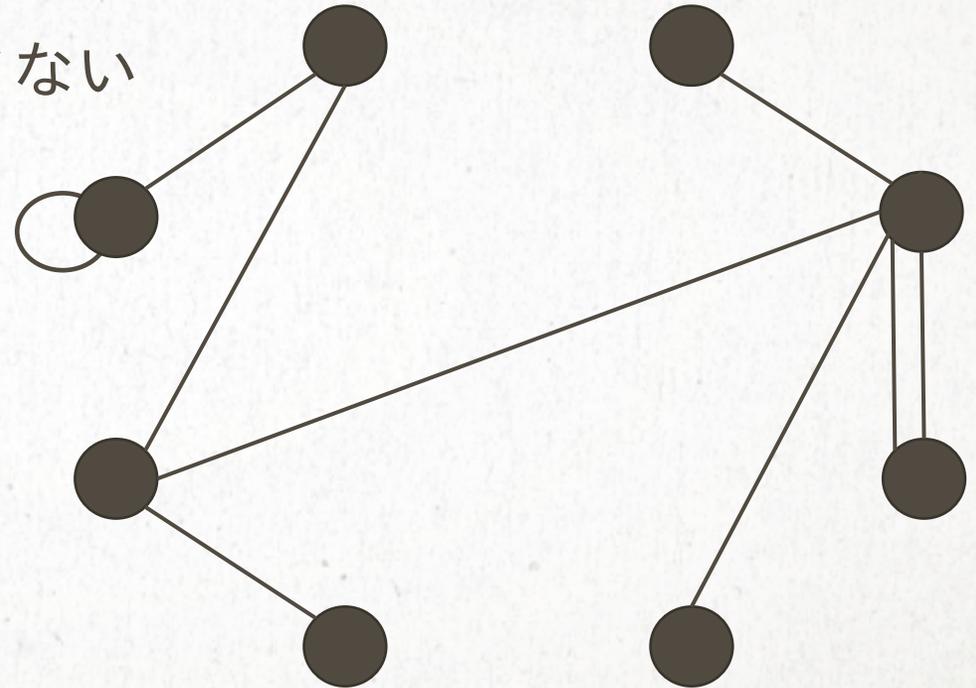
## 2. 実験方法

### 2.2 Configurationモデル (8)

#### 5. 辺の片割れを2つずつ繋いでいく

(自己ループ・多重辺を許す・許さない  
はどちらも生成)

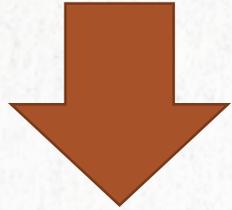
以上を繰り返すと、  
ネットワークが出来る



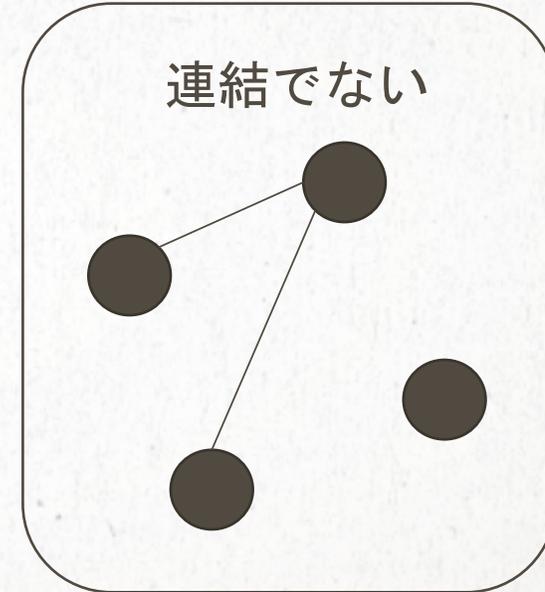
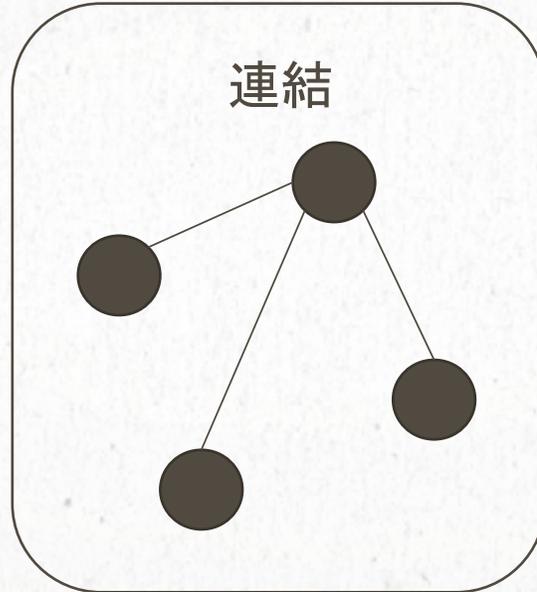
## 2. 実験方法

### 2.2 Configurationモデル (9)

辺を繋いでいった結果、連結なネットワークにならない場合



全ての辺を繋ぎ直す



## 2. 実験方法

### 2.2 修正Configurationモデル

#### Configurationモデルの修正版

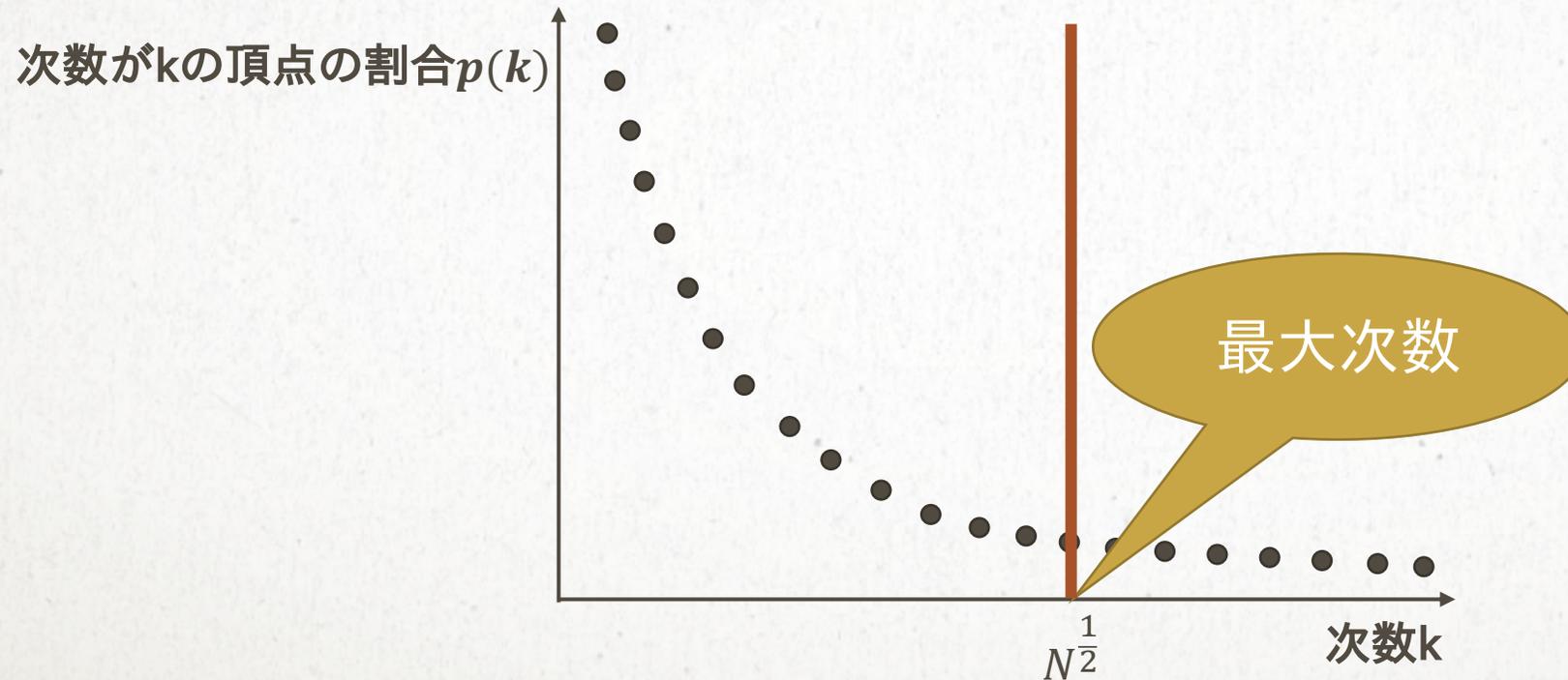
**Uncorrelated性**を持つネットワークを生成できるとされている  
ヒューリスティック

方法) Configurationモデルの次数分布を決める段階で,  
最大次数を  $k_{max} \leq N^{\frac{1}{2}}$  に, カットオフ

## 2. 実験方法

### 2.2 修正Configurationモデル

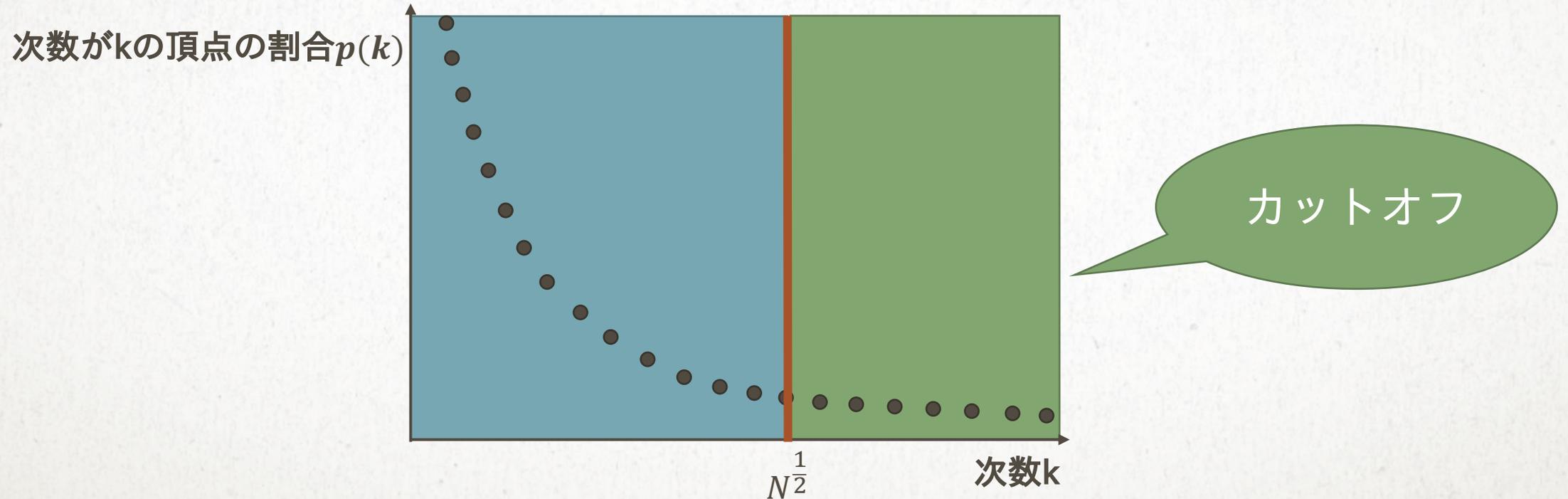
方法) Configurationモデルの次数分布を決める段階で,  
最大次数を  $k_{max} \leq N^{\frac{1}{2}}$  に, カットオフ



## 2. 実験方法

### 2.2 修正Configurationモデル

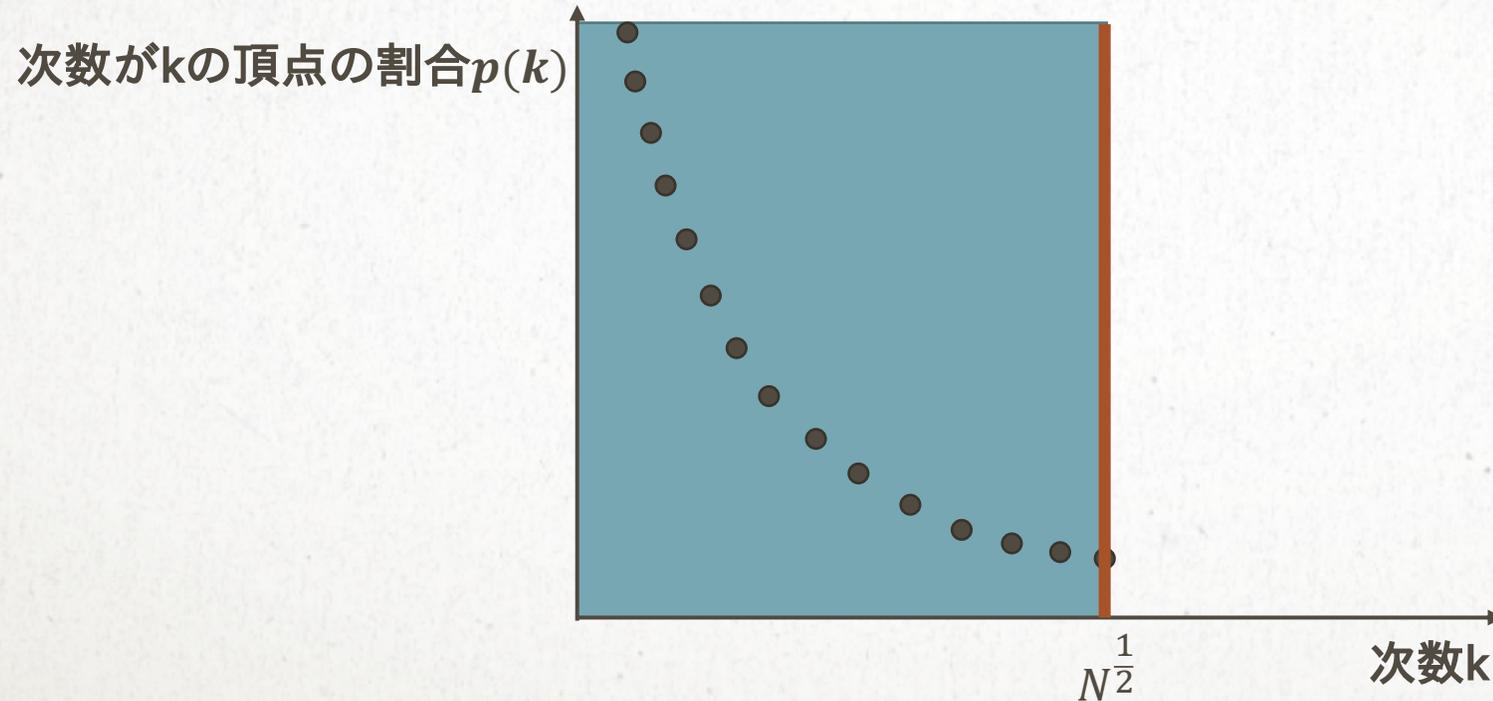
方法) Configurationモデルの次数分布を決める段階で,  
最大次数を  $k_{max} \leq N^{\frac{1}{2}}$  に, カットオフ



## 2. 実験方法

### 2.2 修正Configurationモデル

方法) Configurationモデルの次数分布を決める段階で,  
最大次数を  $k_{max} \leq N^{\frac{1}{2}}$  に, カットオフ



カットオフ

## 2. 実験方法

### 2.3 各ネットワーク生成モデルでの生成数 (1)

本演習では,

WSモデル

WSモデル (alm)

修正Configurationモデル

修正Configurationモデル (alm)

の4つを使用

(alm: **a**llow **l**oop and **m**ultiple)

自己ループ・  
多重辺を許す

## 2. 実験方法

### 2.3 各ネットワーク生成モデルでの生成数 (2)

- WSモデル, WSモデル (alm)は,

以下のパラメーターの組み合わせで各100個ネットワークを生成

頂点数N	10000
平均次数 $\langle k \rangle$	4, 8
繋ぎかえる辺を選ぶ確率 $p(0 \leq p \leq 1)$	0.01, 0.1

全部で800個

## 2. 実験方法

### 2.3 各ネットワーク生成モデルでの生成数 (3)

- 修正Configurationモデル, 修正Configurationモデル (alm) は, 以下のパラメーターの組み合わせで各100個ネットワークを生成

頂点数 $N$	10000
最小次数 $k_{min}$	2
べき指数 $\gamma$	2.25, 2.5, 2.75, 3.0

全部で800個

## 2. 実験方法

### 2.4 情報伝播実験 (1)

伝播モデルのターゲットノードの各選択方法を以下のように定義

1. 一様分布に従い乱択 : **NC** (**N**o **C**ontrol)
2. 次数の大きい頂点を優先的に乱択 : **PC** (**P**referential **C**ontrol)
3. 次数の小さい頂点を優先的に乱択 : **RPC** (**R**everse **P**referential **C**ontrol)

## 2. 実験方法

### 2.4 情報伝播実験 (2)

情報伝播実験は、各ネットワーク100回実施

- 各生成パラメーターのRPC最速割合, RPC平均ステップ数, 平均辺数の表を作成
- 各生成パラメーターのRPC最速割合とクラスター係数の関係をグラフ化

### 3. 実験結果

#### 3.1 RPC最速割合, RPC平均ステップ数, 平均辺数 (WS)

##### WSモデル, WSモデル (alm)

	RPC最速割合 (%)	RPC平均ステップ数	平均辺数
WS 4 0.01	22.91	153.45	20000
WS 4 0.1	30.88	42.47	20000
WS 8 0.01	20.17	69.37	40000
WS 8 0.1	32.27	28.91	40000
WS_alm 4 0.01	21.91	153.09	20000
WS_alm 4 0.1	31.24	42.55	20000
WS_alm 8 0.01	19.33	69.4	40000
WS_alm 8 0.1	32.09	28.91	40000

### 3. 実験結果

#### 3.1 RPC最速割合, RPC平均ステップ数, 平均辺数 (UCM)

##### 修正Configurationモデル, 修正Configurationモデル (alm)

	RPC最速割合 (%)	RPC平均ステップ数	平均辺数
UCM 2.25	92.57	171.53	25500.63
UCM 2.5	83.35	156.3	20742.77
UCM 2.75	72.3	134.87	17721.78
UCM 3.0	62.7	107.53	15672.75
UCM_alm 2.25	93.04	170.32	25462.9
UCM_alm 2.5	82.36	156.01	20760.01
UCM_alm 2.75	73.31	133.88	17693.7
UCM_alm 3.0	63.71	109.8	15712.39

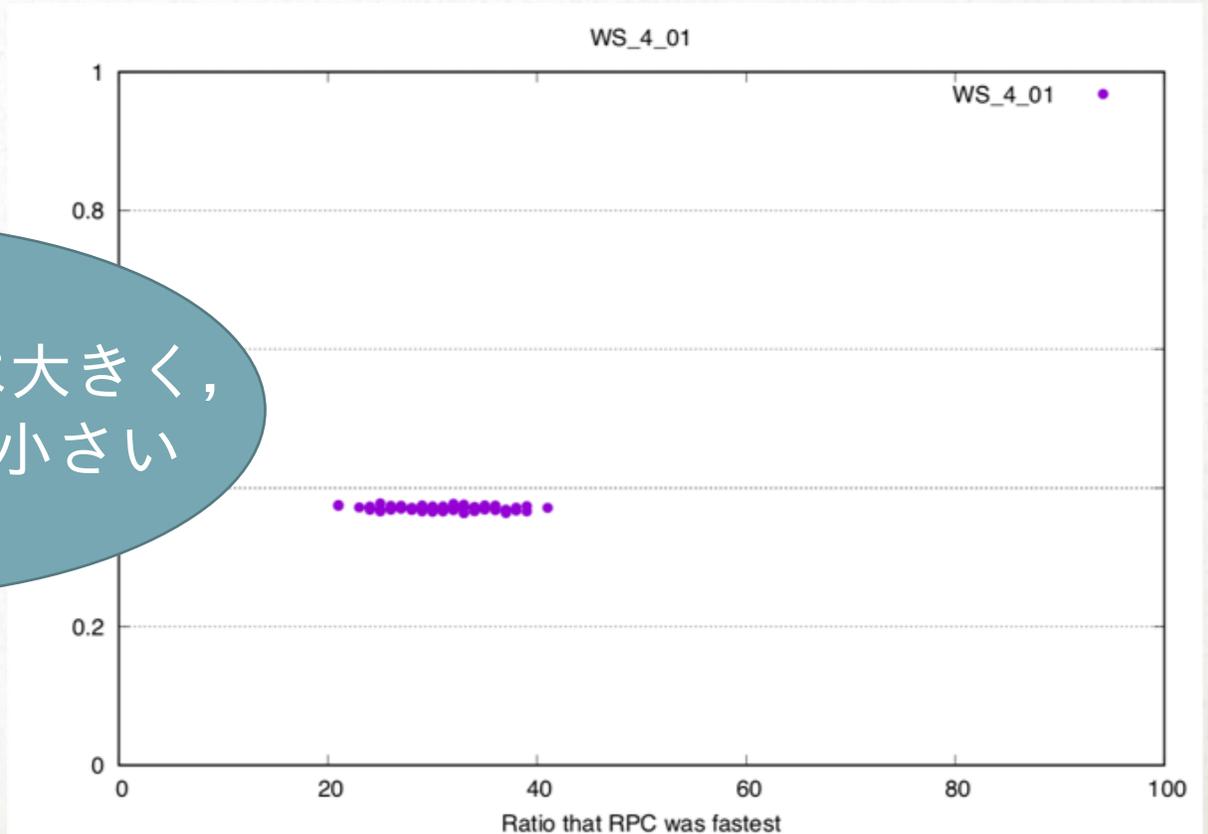
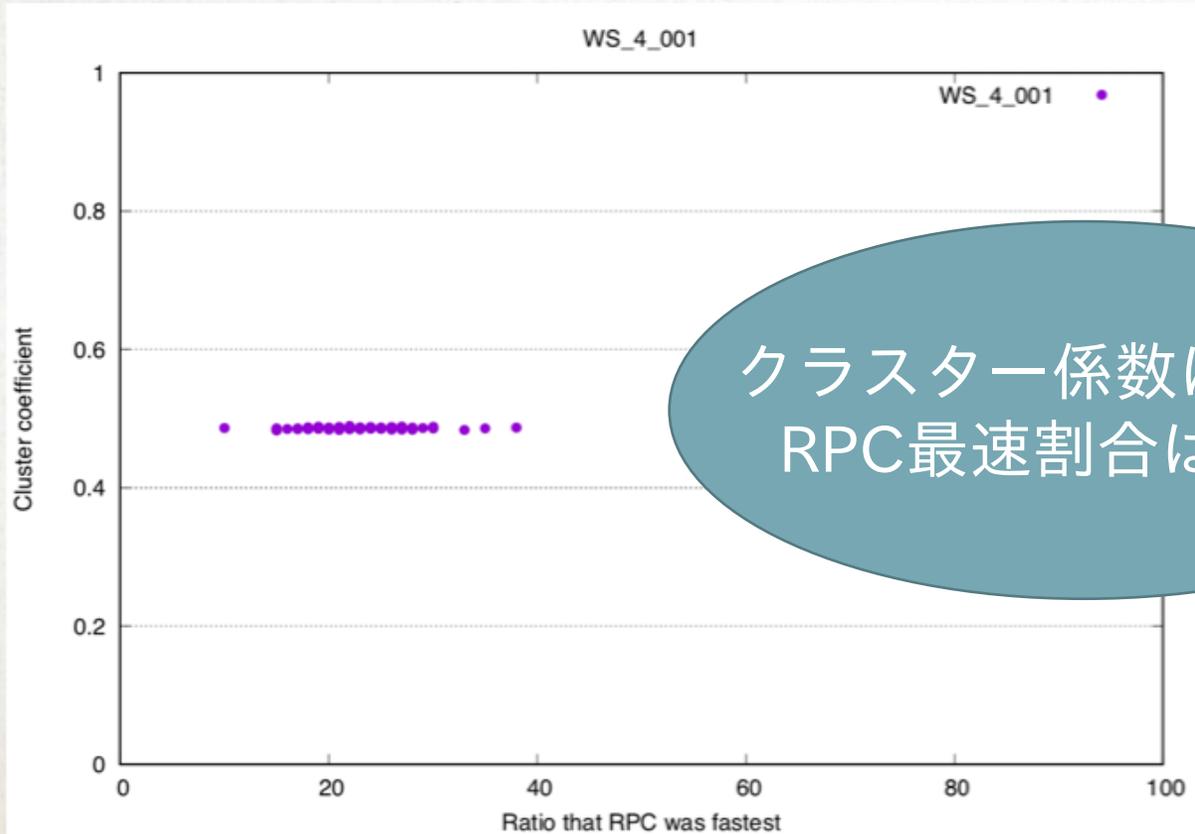
(UCM : **U**ncorrelated **C**onfiguration **M**odel)

### 3. 実験結果

#### 3.2 RPC最速割合とクラスター係数 (WS)

$$\langle k \rangle = 4, p = 0.01$$

$$\langle k \rangle = 4, p = 0.1$$



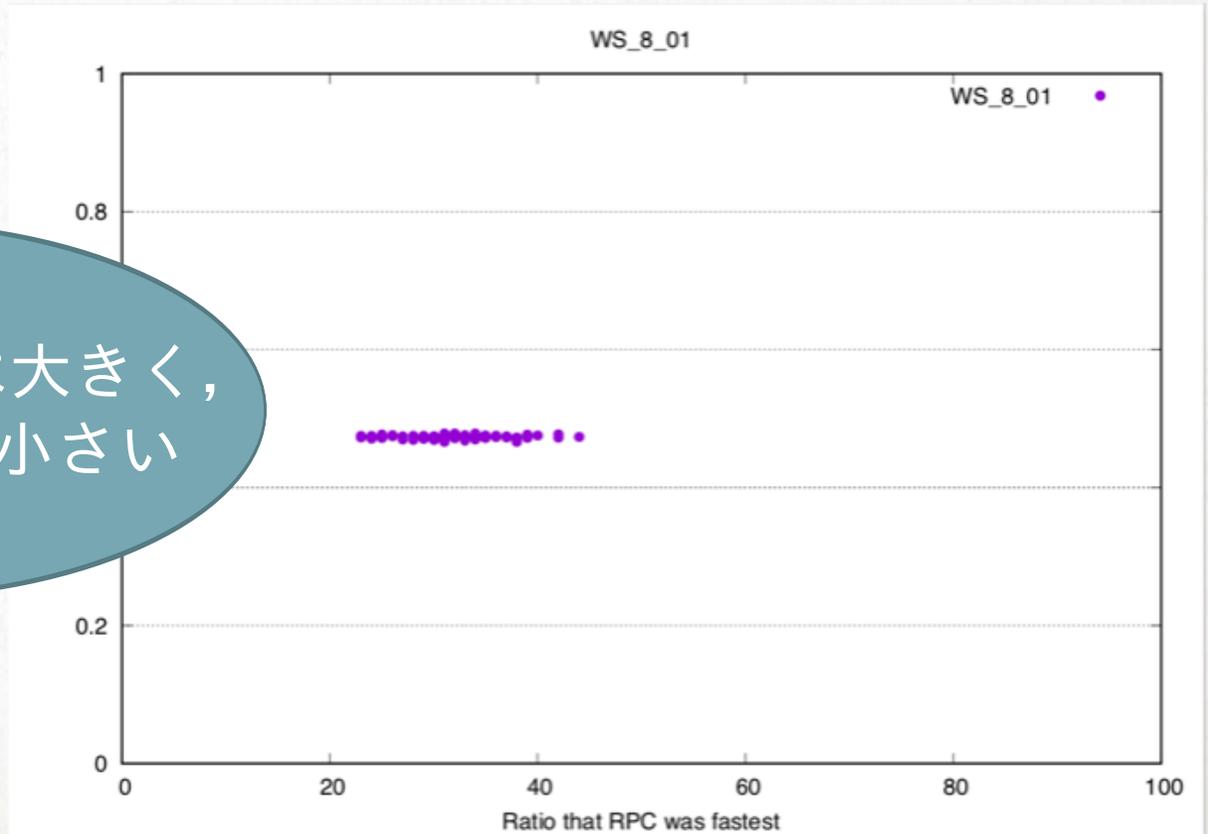
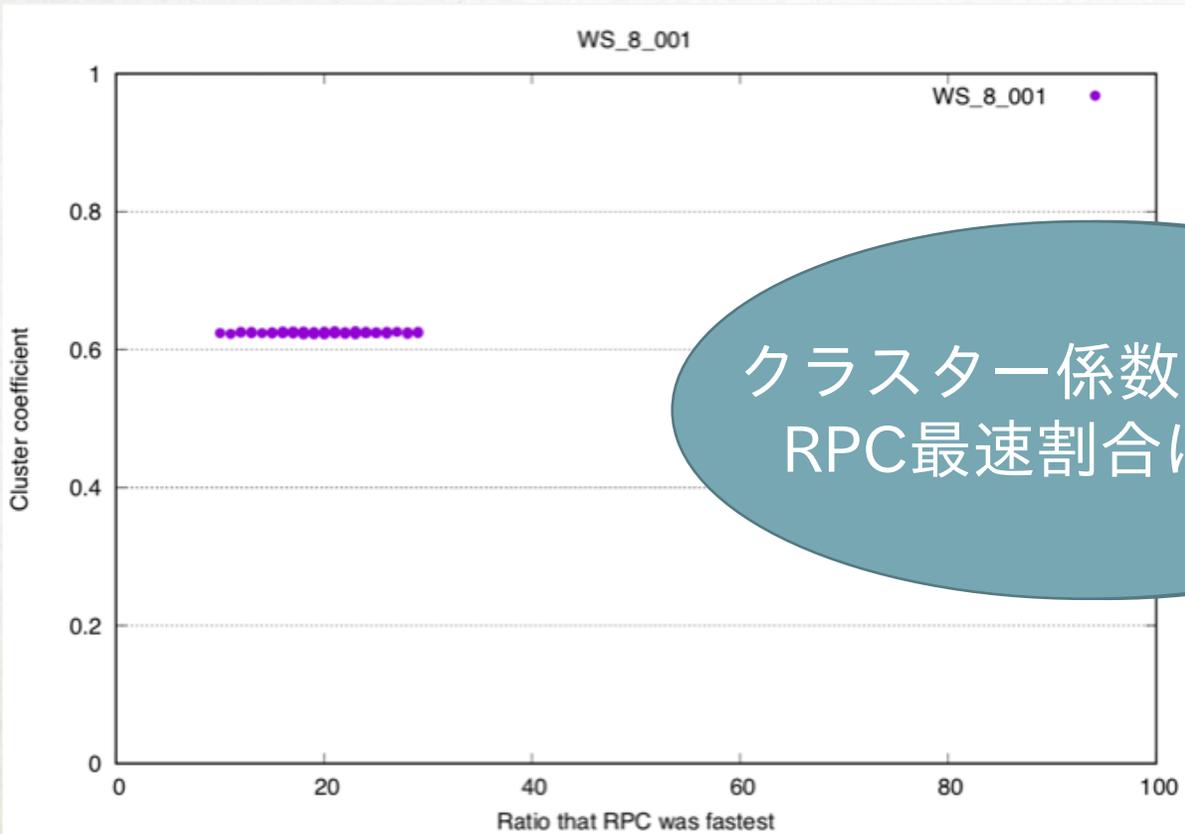
クラスター係数は大きく、RPC最速割合は小さい

### 3. 実験結果

#### 3.2 RPC最速割合とクラスター係数 (WS)

$$\langle k \rangle = 8, p = 0.01$$

$$\langle k \rangle = 8, p = 0.1$$



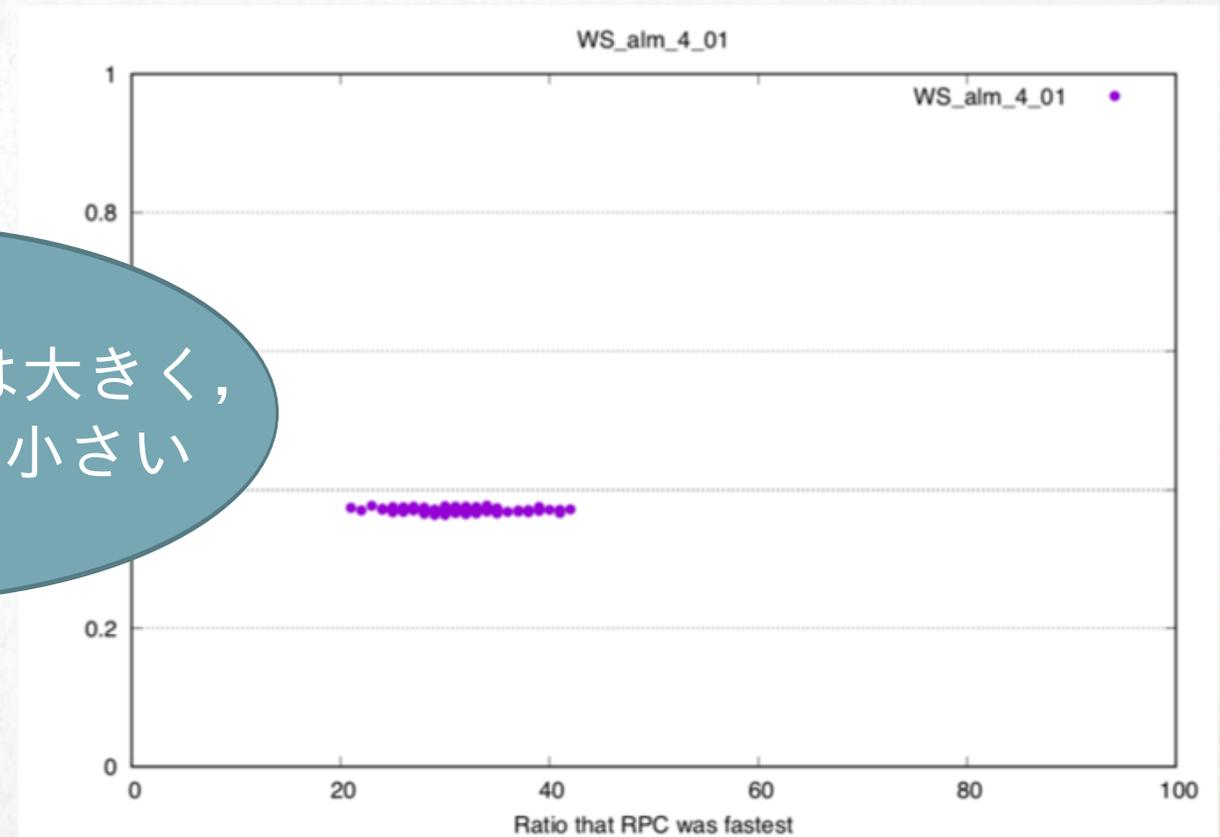
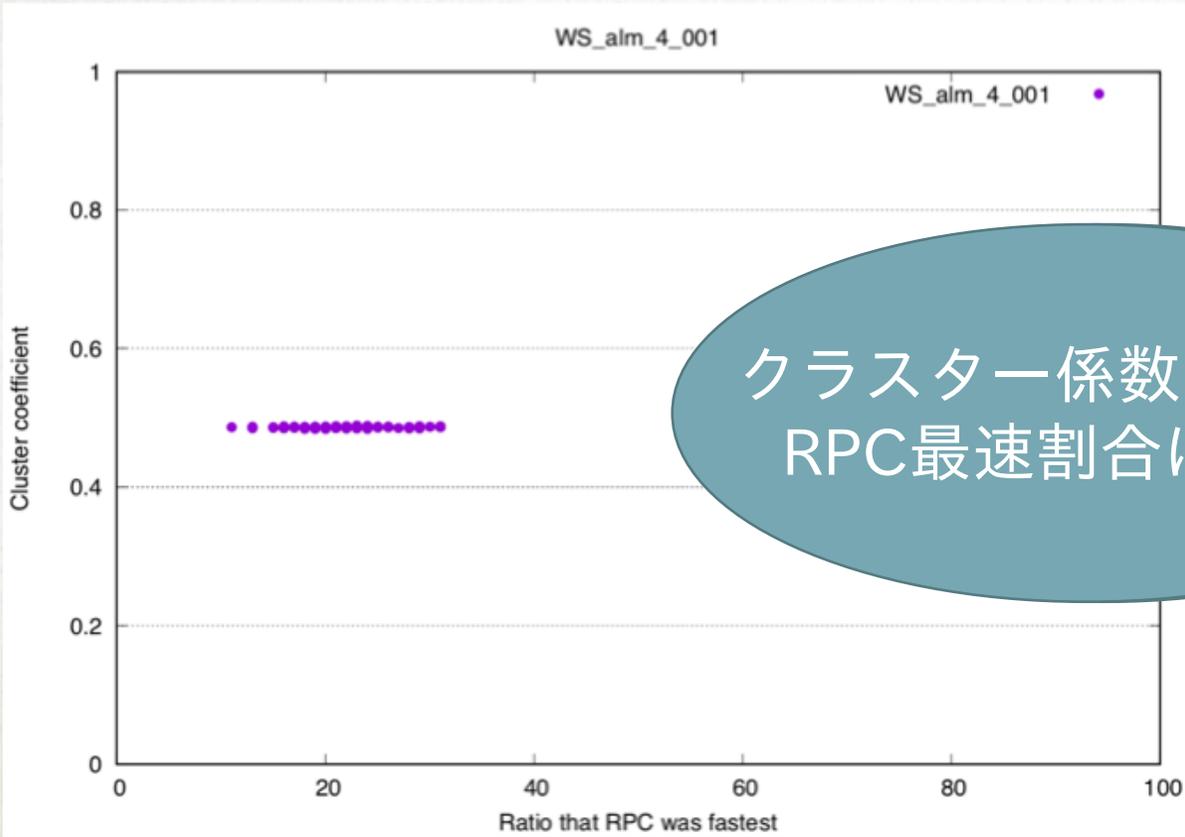
クラスター係数は大きく、RPC最速割合は小さい

### 3. 実験結果

#### 3.2 RPC最速割合とクラスター係数 (WS\_alm)

$$\langle k \rangle = 4, p = 0.01$$

$$\langle k \rangle = 4, p = 0.1$$



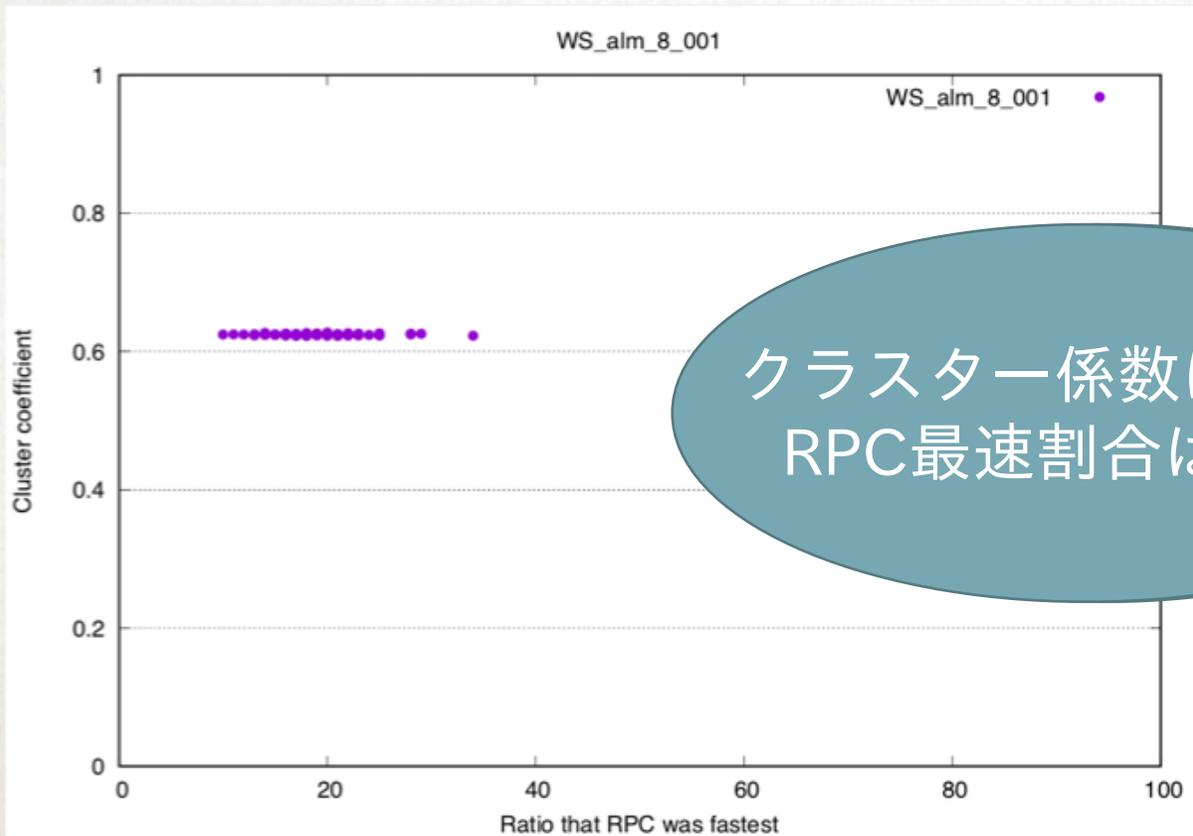
クラスター係数は大きく、RPC最速割合は小さい

### 3. 実験結果

#### 3.2 RPC最速割合とクラスター係数 (WS\_alm)

$$\langle k \rangle = 8, p = 0.01$$

$$\langle k \rangle = 8, p = 0.1$$

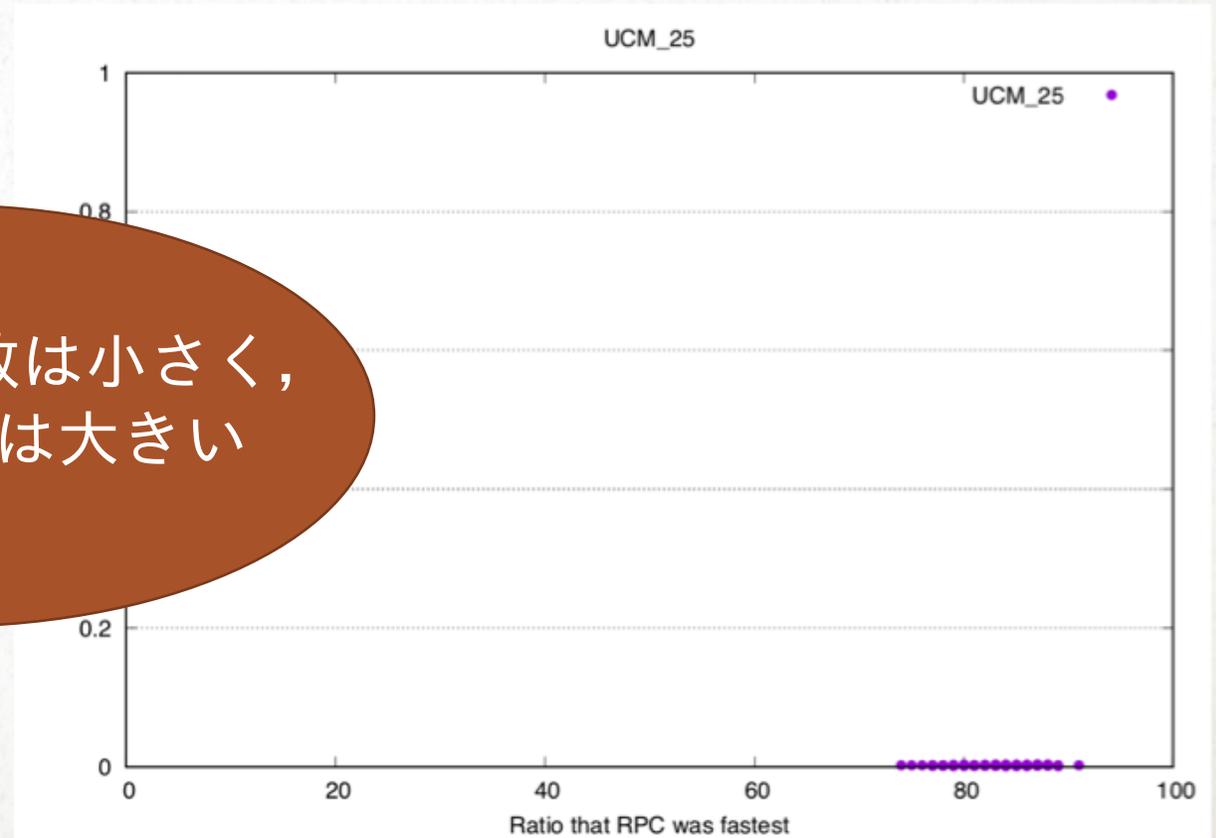
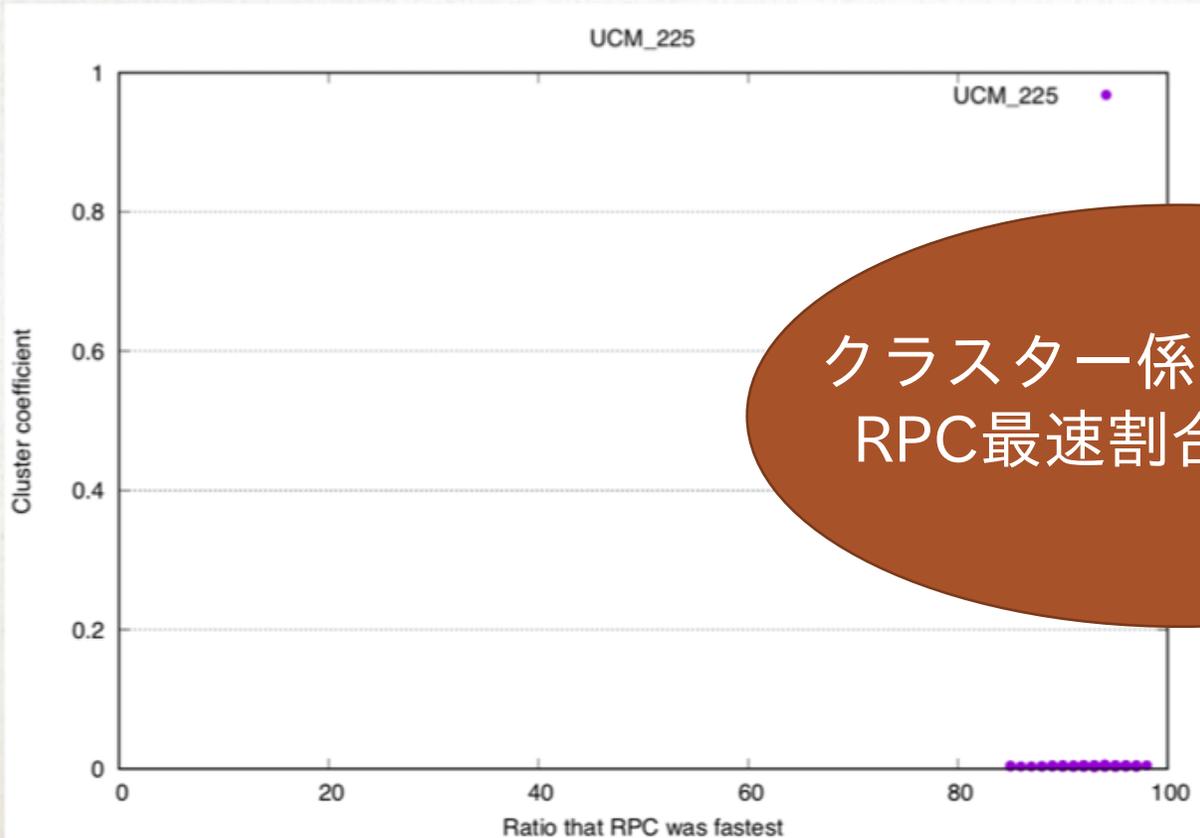


### 3. 実験結果

#### 3.2 RPC最速割合とクラスター係数 (UCM)

$\gamma = 2.25$

$\gamma = 2.5$

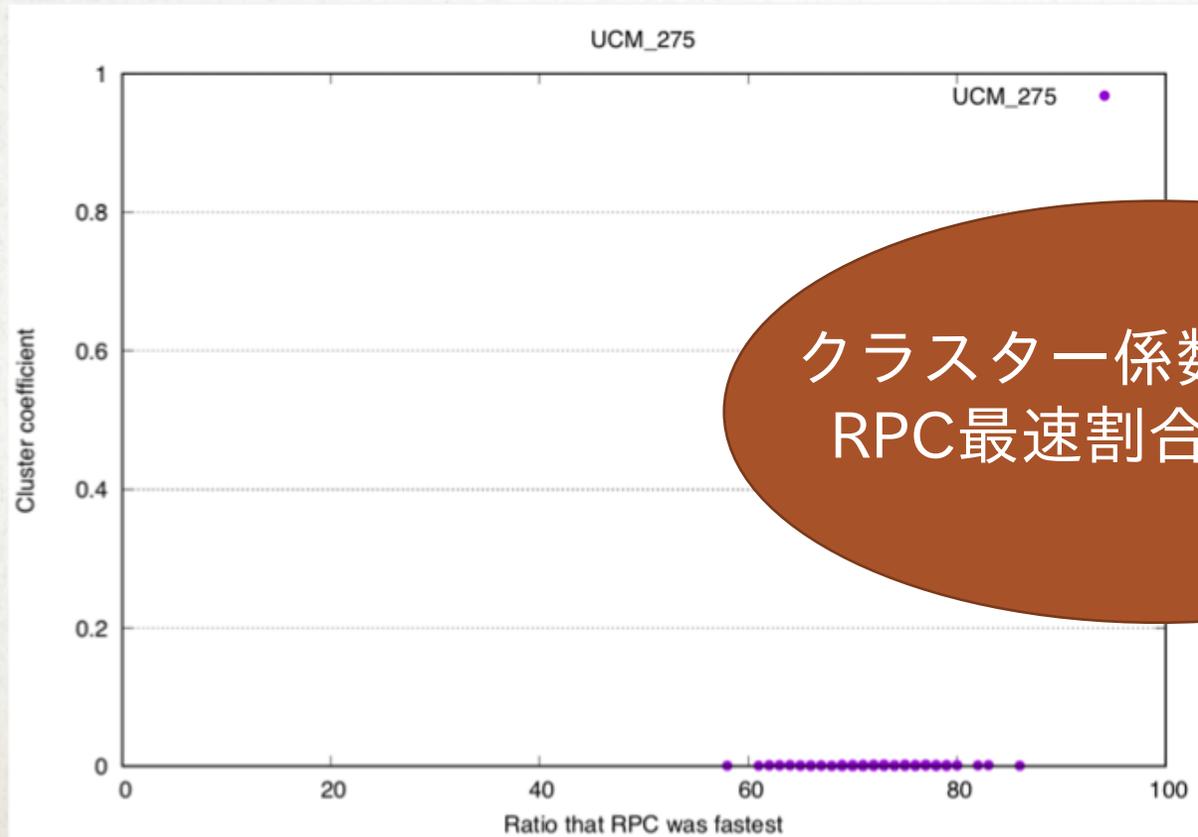


クラスター係数は小さく、  
RPC最速割合は大きい

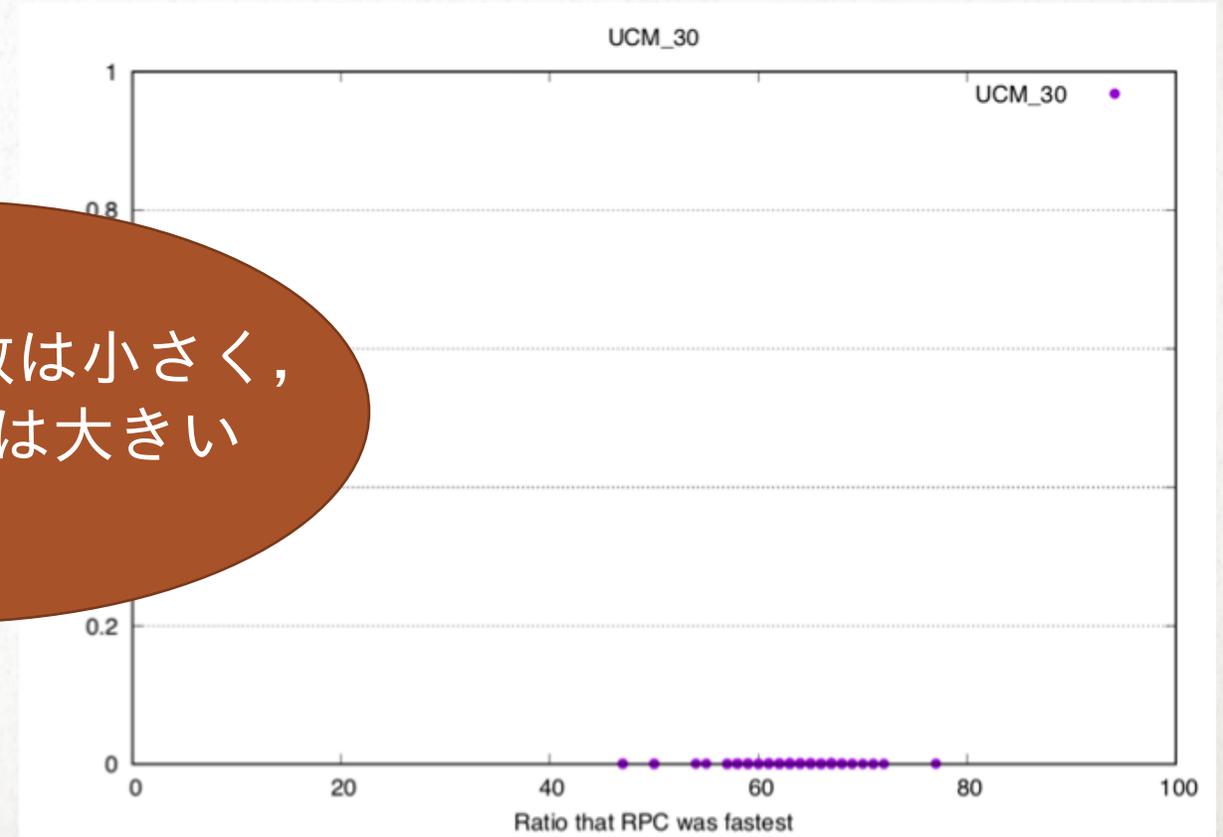
### 3. 実験結果

#### 3.2 RPC最速割合とクラスター係数 (UCM)

$\gamma = 2.75$



$\gamma = 3.0$

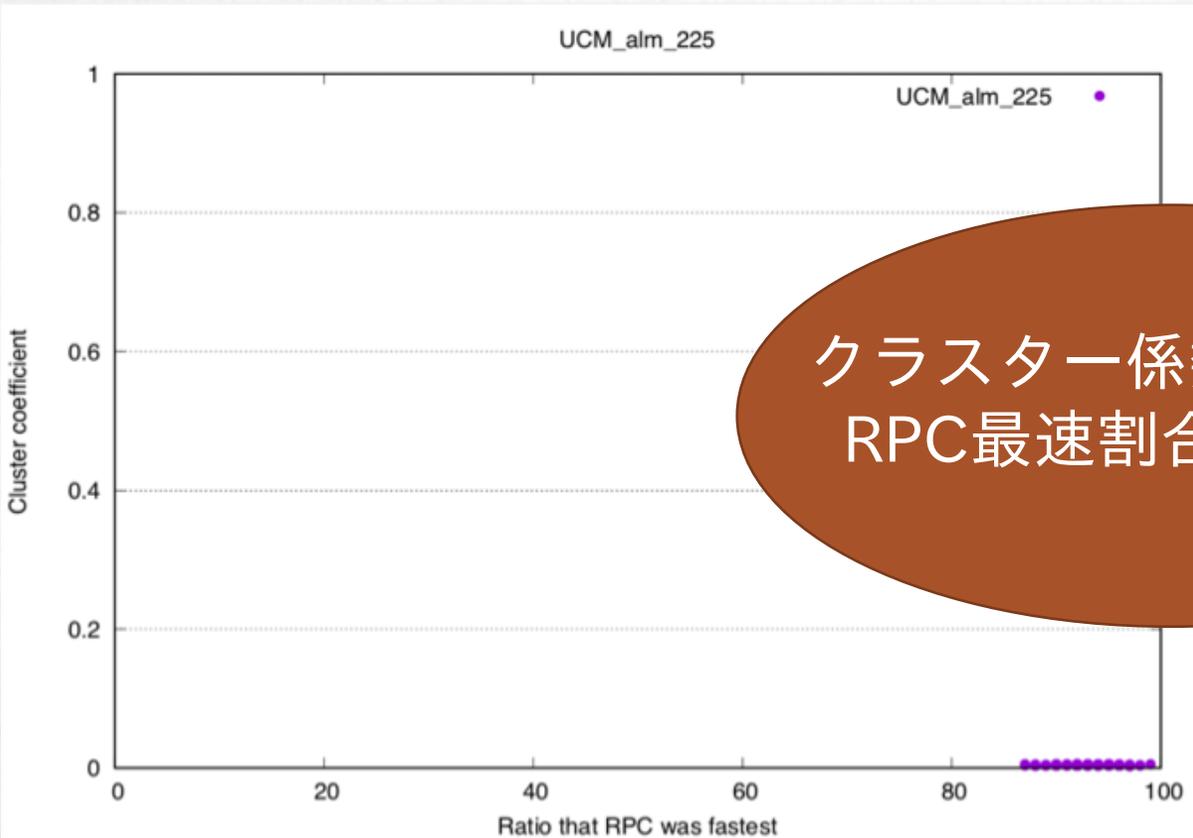


クラスター係数は小さく、RPC最速割合は大きい

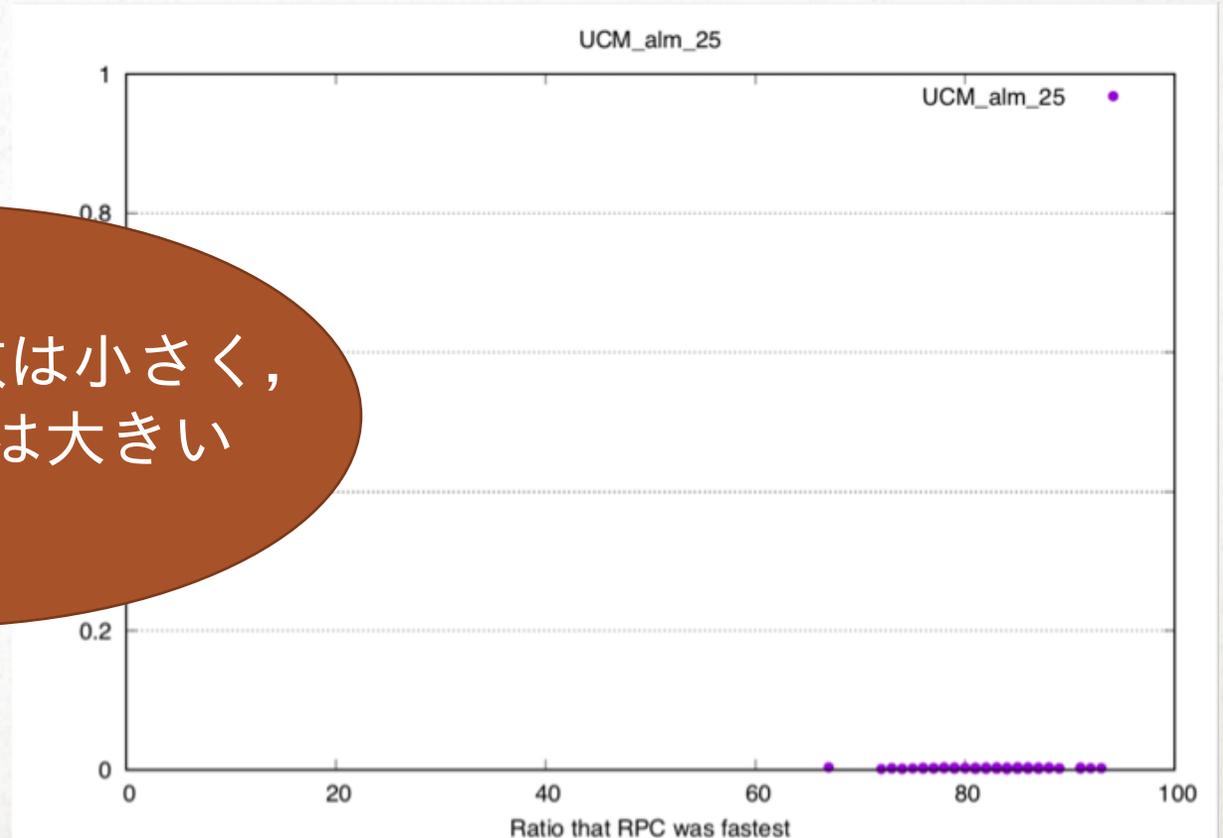
### 3. 実験結果

#### 3.2 RPC最速割合とクラスター係数 (UCM\_alm)

$\gamma = 2.25$



$\gamma = 2.5$



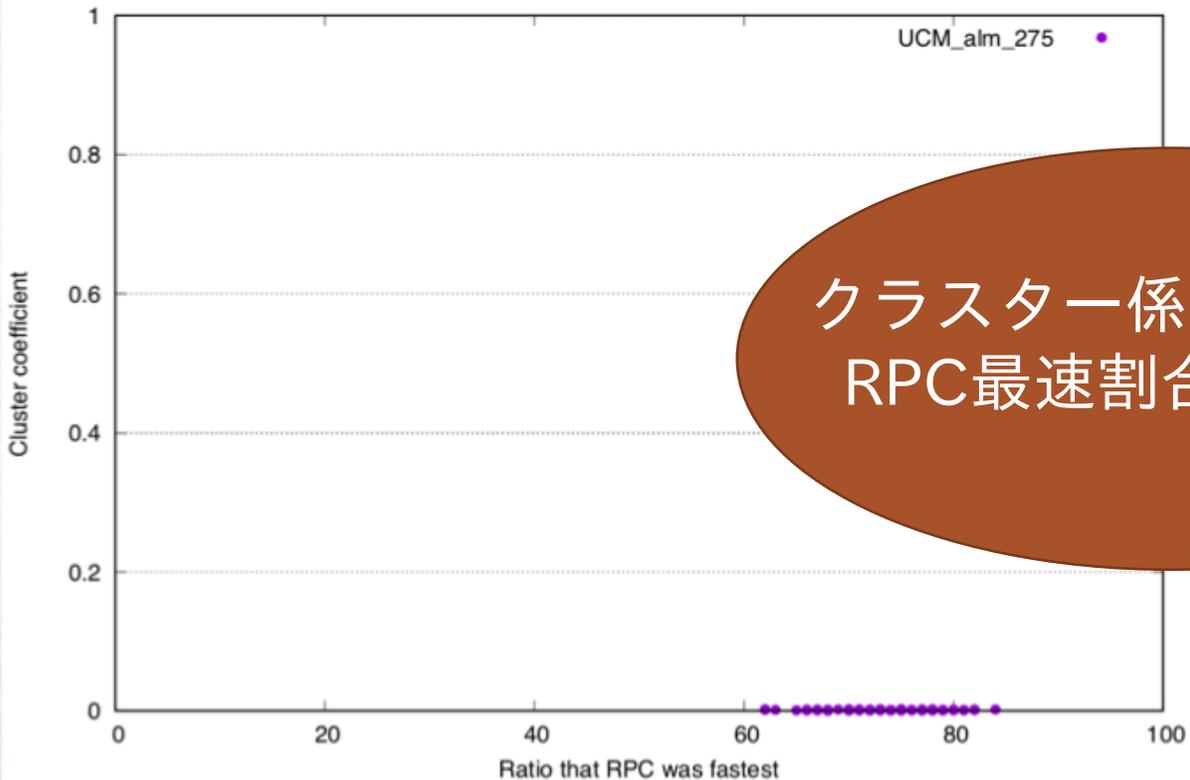
クラスター係数は小さく、  
RPC最速割合は大きい

### 3. 実験結果

#### 3.2 RPC最速割合とクラスター係数 (UCM\_alm)

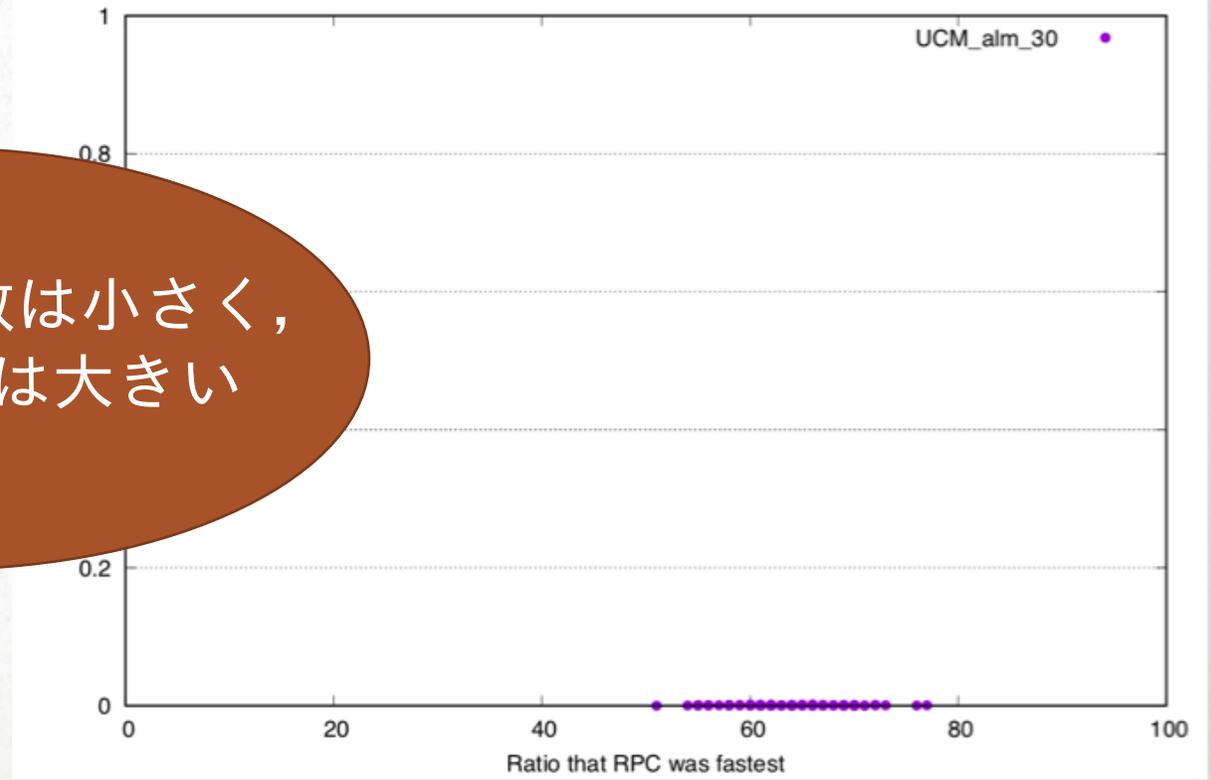
$\gamma = 2.75$

UCM\_alm\_275



$\gamma = 3.0$

UCM\_alm\_30



クラスター係数は小さく、  
RPC最速割合は大きい

## 3. 実験結果

### 3.3 実験結果まとめ (1)

#### RPC最速割合

- WSモデルでは、全てのパラメーターにおいてRPC最速割合が**最大とならなかった**
- 修正Configurationモデルでは、全てのべき指数においてRPC最速割合が**最大となった**

## 3. 実験結果

### 3.3 実験結果まとめ (2)

#### RPC最速割合とクラスター係数

- WSモデルでは,  
RPC最速割合は**小さく**,  
クラスター係数は**大きい**
- 修正Configurationモデルでは,  
RPC最速割合は**大きく**,  
クラスター係数はほぼ0に近いほど**小さい**

## 3. 実験結果

### 3.3 実験結果まとめ (3)

#### RPC最速割合とクラスター係数の相関係数

-0.92

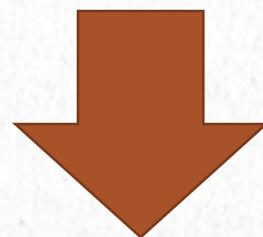
かなり強い負の相関

RPC最速割合が**大きくなる**につれて、  
クラスター係数が**小さくなる**

## 4. 考察 (1)

本演習の背景となった定理 (再掲)

ネットワークが**Uncorrelated性を持つ**なら、  
次数の小さい頂点に優先的に流す方法が**最速である**



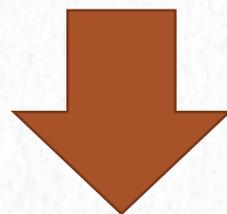
対偶は真

逆, 裏は  
真とは限らない

次数の小さい頂点に優先的に流す方法が**最速でない**なら、  
ネットワークは**Uncorrelated性を持たない**

## 4. 考察 (2)

WSモデルでは、全てのパラメーターで  
RPC最速割合が最大にはならなかった



**Uncorrelated性**を持たない

## 4. 考察 (3)

WSモデル (**Uncorrelated性を持たない**)

→ クラスタ係数が大きい

修正Configurationモデル (**Uncorrelated性を持つ** ネットワークを生成できるとされるヒューリスティック)

→ クラスタ係数がほぼ0に近いほど小さい



**Uncorrelated性**を持つかどうかに関係している可能性

## 5. 今後の課題

- スケールフリー性とスモールワールド性を併せ持つネットワークで情報伝播実験
- 他のネットワーク特徴量についても調査
- ネットワークの性質が大きく変わるべき指数3の前後のネットワーク解析  
→ ..., 2.97, 2.98, 2.99, 3.00, 3.01, 3.02, 3.03, ...

## 6. おわりに

- WSモデルは**Uncorrelated性を持たない**
- WSモデルで生成したネットワークは,  
RPC最速割合が**小さく**,  
クラスター係数が**大きい**
- 修正Configurationモデルで生成したネットワークは,  
RPC最速割合が**大きく**,  
クラスター係数が**小さい**



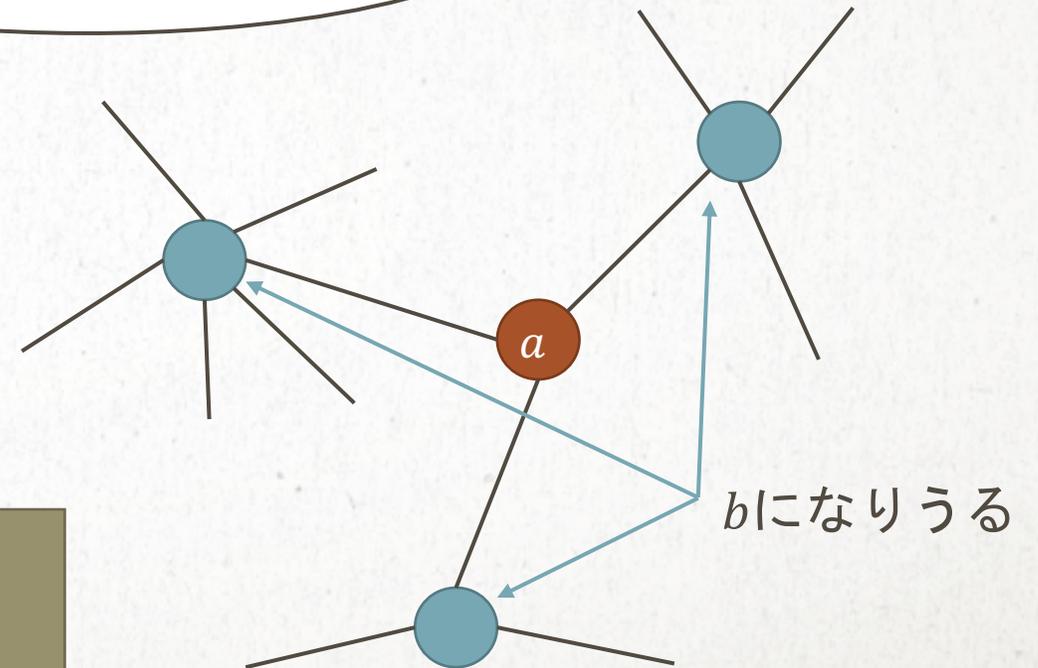
# 本演習におけるUncorrelatedネットワーク

近似  
 $q(b; a) \approx q_b$

全頂点の中から情報伝播先として**b**が選択される確率

**b**が**a**の情報伝播先として選択される確率  
(条件付き確率 $q(b|a)$ )

**a** : 情報を持っている頂点  
**b** : 情報伝播先として選択された頂点



## 情報伝播先として選択される確率

$b$ が $a$ の情報伝播先として選択される確率  
(条件付き確率 $q(b|a)$ )

$$q(b; a) = \frac{w_b}{\sum_{i=1}^{k_a} w_{a_i}}$$

全頂点の中から情報伝播先として $b$ が選択される確率

$$q_b = \frac{k_b w_b}{\sum_{j=1}^N k_j w_j}$$

$w_i$ は頂点 $i$ の重み

$k_i$ は頂点 $i$ の次数

$a_i$ は頂点 $a$ の隣接頂点の $i$ 番目

## WSモデルの解析

$L$  : 平均距離

$C$  : クラスタ係数

$L$ と $C$ は繋ぎかえる辺を選ぶ確率 $p$ に依存するので,  $L(p), C(p)$ とする

## WSモデルの解析

$p = 0$ では，拡張サイクルである

$$C(0) = \frac{3\langle k \rangle - 6}{4\langle k \rangle - 4}$$

$$L(0) \approx \frac{N}{2\langle k \rangle}$$

## WSモデルの解析

一般の $p$ では,

$$C(p) = \frac{3\langle k \rangle - 6}{4\langle k \rangle - 4} (1 - p)^3$$

$$L(p) \approx \begin{cases} \frac{N}{2\langle k \rangle}, & \left(\frac{N\langle k \rangle p}{2} \ll 1\right) \\ \frac{\log(N\langle k \rangle p)}{\langle k \rangle^2 p}, & \left(\frac{N\langle k \rangle p}{2} \gg 1\right) \end{cases}$$

$C(0)$ で存在したクラスターを形成する3つの辺が全て残る確率で計算

繋がえられた辺  
(ショートカット)  
の本数

# スケールフリーネットワークの次数平均

次数 $k$ （離散値）を連続近似して解析

次数平均 $\langle k \rangle$

$$\langle k \rangle = \frac{(\gamma - 1)k_{min}^{\gamma-1}}{2 - \gamma} [k^{-\gamma+2}]_{k_{min}}^{\infty}$$

$$\langle k \rangle = \begin{cases} \frac{\gamma - 1}{\gamma - 2} k_{min}, & \gamma > 2 \\ \infty, & \gamma \leq 2 \end{cases}$$

## スケールフリーネットワークの次数の2乗平均

次数 $k$ （離散値）を連続近似して解析

次数の2乗平均 $\langle k^2 \rangle$

$$\langle k^2 \rangle = \frac{(\gamma - 1)k_{min}^{\gamma-1}}{3 - \gamma} [k^{-\gamma+3}]_{k_{min}}^{\infty}$$

$$\langle k^2 \rangle = \begin{cases} \frac{\gamma - 1}{\gamma - 2} k_{min}^2, & \gamma > 3 \\ \infty, & \gamma \leq 3 \end{cases}$$

## 平均距離が小さい

平均距離を $L$ とした時に,

$$L \propto \log N$$

になること

例) 頂点数 $N$ を10000とすると,

$$L \propto \log N \approx 13.29$$

## クラスター係数が大きい

同じ次数列でランダムに作るネットワークより  
有意に大きくなること